ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRỊNH HỒNG UYÊN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu

Phương trình vô tỷ là một lớp bài toán có vị trí đặc biệt quan trọng trong chương trình toán học bậc phổ thông. Nó xuất hiện nhiều trong các kì thi học sinh giỏi cũng như kì thi tuyển sinh vào đại học. Học sinh phải đối mặt với rất nhiều dạng toán về phương trình vô tỷ mà phương pháp giải chúng lại chưa được liệt kê trong sách giáo khoa. Đó là các dạng toán về phương trình vô tỷ giải bằng phương pháp đưa về hệ (đối xứng hoặc không đối xứng), dùng phương pháp đặt ẩn phụ không toàn phần, dạng ẩn phụ lượng giác, ...

Việc tìm phương pháp giải phương trình vô tỷ cũng như việc xây dựng các phương trình vô tỷ mới là niềm say mê của không ít người, đặc biệt là những người đang trực tiếp dạy toán. Chính vì vậy, để đáp ứng nhu cầu giảng dạy và học tập, tác giả đã chọn đề tài "Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ" làm đề tài nghiên cứu của luận văn. Đề tài nhằm một phần nào đó đáp ứng mong muốn của bản thân về một đề tài phù hợp mà sau này có thể phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy của mình trong nhà trường phổ thông. Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn trực tiếp của NGND. GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đối với người thầy của mình, người đã nhiệt tình hướng dẫn, chỉ bảo và mong muốn được học hỏi thầy nhiều hơn nữa.

Tác giả xin chân thành cảm ơn quý thầy cô trong Ban giám hiệu, Phòng đào tạo Đại học và sau Đại học Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, cùng quý thầy cô tham gia giảng dạy khóa học đã tạo mọi điều kiện, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu để tác giả hoàn thành khóa học và hoàn thành bản luận văn này.

Luận văn gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày hệ thống các phương pháp giải cơ bản lớp các phương trình vô tỷ.

Chương 2 trình bày phương pháp giải và biện luận phương trình vô tỷ có chứa tham số.

Chương 3 trình bày một số cách xây dựng phương trình vô tỷ mới.

Mặc dù đã cố gắng rất nhiều và nghiêm túc trong quá trình nghiên cứu, nhưng do thời gian và trình độ còn hạn chế nên kết quả đạt được trong luận văn còn rất khiêm tốn và không tránh khỏi thiếu xót. Vì vậy tác giả mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp, chỉ bảo quý báu của quý thầy cô, các anh chị đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên 2011
Trịnh Hồng Uyên

Chương 1

Phương pháp giải phương trình vô tỷ

1.1. Phương pháp hữu tỷ hóa

Nhìn chung để giải phương trình vô tỷ ta thường quy về phương trình hữu tỷ để giải. Ta thường dùng các phương pháp sau đây để đưa các phương trình vô tỷ về phương trình hữu tỷ mà ta có thể gọi các phương pháp này là "hữu tỷ hoá".

1.1.1. Sử dụng các phép biến đổi tương đương

Nội dung chính của phương pháp này là luỹ thừa hai vế với số mũ phù hợp.

Một số phép biến đổi tương đương thường gặp.

[1]. $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$

[2]. $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f(x) = g^{2n}(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

[3]. $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x).$

Ví dụ 1.1. Giải phương trình

$$\sqrt{2x+1} = 3x+1. \tag{1.1}$$

Giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
(1.1) \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = (3x+1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ 9x^2+4x = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x = 0, x = -\dfrac{4}{9} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \quad x = 0, x = -\frac{4}{9} \ \text{(loại)}.
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Nhận xét 1.1. Phương trình trên có dạng tổng quát $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Khi gặp dạng phương trình này, ta sử dụng biến đổi sau.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Ví dụ 1.2. Giải phương trình

$$1 + \frac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}. \tag{1.2}$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} x - x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$

Để giải phương trình này, ta thường nghĩ đến việc bình phương hai vế không âm của một phương trình để được phương trình tương đương.

$$
\begin{aligned}
(1.2) \Leftrightarrow\ & 2(x - x^2) - 3\sqrt{x - x^2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x - x^2}(2\sqrt{x - x^2} - 3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{x - x^2} = 0 \\ 2\sqrt{x - x^2} = 3 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - x^2 = 0 \\ 4x^2 - 4x + 9 = 0 \ \text{(vô nghiệm)} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Suy ra $x = 1$ hoặc $x = 0$.

Kết hợp với điều kiện bài ra, ta có $x = 0; x = 1$ là nghiệm phương trình.

Nhận xét 1.2. Dạng tổng quát của phương trình trên là $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$. Khi gặp dạng phương trình này ta biến đổi tương đương như sau

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\\ f(x)+g(x)+2\sqrt{f(x)g(x)}=h(x)\end{cases}$$

Ví dụ 1.3 (Hoc sinh giỏi quốc gia năm 2000)**.** Giải phương trình

$$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2. \tag{1.3}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}(1.3) \Leftrightarrow &\begin{cases} x\geq 2\\ 4-3\sqrt{10-3x}=x^2-4x+4\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x\geq 2\\ 4x-x^2=3\sqrt{10-3x}\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2\leq x\leq 4\\ x^4-8x^3+16x^2+27x-90=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2\leq x\leq 4\\ (x-3)(x^3-5x^2+x+30)=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2\leq x\leq 4\\ (x-3)(x+2)(x^2-7x+15)=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\ x=3.\end{aligned}$$

Vậy $x=3$ là nghiệm của phương trình.

1.1.2. Thực hiện phép nhân liên hợp để đơn giản việc tính toán

Ta đã biết nếu $x=x_0$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ thì điều đó có nghĩa là $\begin{cases} x_0\in D_f\\ f(x_0)=0\end{cases}$

Nếu $x=a$ là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $P(x)=(x-a)P_1(x)$, trong đó $P_1(x)$ là đa thức với $\deg P_1=\deg P-1$.

Nếu x_0 là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$ thì ta có thể đưa phương trình $f(x)=0$ về dạng $(x-x_0)f_1(x)=0$ và khi đó việc giải phương trình $f(x)=0$ quy về phương trình $f_1(x)=0$.

Ví dụ 1.4. Giải phương trình

$$3(2+\sqrt{x-2}) = 2x+\sqrt{x+6}. \tag{1.4}$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

Ta thấy $x = 3$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Nhận xét rằng khi $x = 3$ thì $x-2$ và $4x+6$ là những số chính phương. Do đó ta tìm cách đưa phương trình đã cho về dạng $(x-3)f_1(x) = 0$.

Biến đổi phương trình về dạng sau $2(x-3)+(\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}) = 0$.

Vấn đề còn lại của chúng ta là phải phân tích $\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2} = 0$ để có thừa số $(x-3)$. Ta có $(x+6)-9(x-2) = -8(x-3)$, điều này giúp ta liên tưởng đến hằng đẳng thức $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$. Ta biến đổi

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2} &= \frac{(\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2})(\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{-8(x-3)}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(x-3)\Big(2-\frac{8}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}\Big) = 0.$$

Đến đây ta chỉ cần giải phương trình

$$2-\frac{8}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}} = 0$$

hay

$$\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2} = 4.$$

Phương trình này có một nghiệm $x = \dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}, x = \dfrac{11+3\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$ và $x = \dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}, x = \dfrac{11+3\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét 1.3. Qua ví dụ trên ta thấy để khử căn thức ta có thể sử dụng hằng đẳng thức

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Ta gọi hai biểu thức $a-b$ và $a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}$ là các biểu thức liên hợp của nhau. Nên phương pháp trên thường được gọi tắt là phương pháp nhân liên hợp.

Ví dụ 1.5 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4 THPT Thái Phiên, Đà Nẵng)**.** Giải phương trình

$$\frac{1+3\sqrt{x}}{4x+\sqrt{2+x}}-1=0. \quad (1.5)$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} x\geq 0 \\ 2+x\geq 0 \\ 4x+\sqrt{2+x}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0.$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1.5) \Leftrightarrow\ & 1+3\sqrt{x}-4x-\sqrt{2+x}=0 \\
\Leftrightarrow\ & 3\sqrt{x}-\sqrt{2+x}=4x-1 \\
\Leftrightarrow\ & (3\sqrt{x}-\sqrt{2+x})(3\sqrt{x}+\sqrt{2+x})=(4x-1)(3\sqrt{x}+\sqrt{2+x}) \\
\Leftrightarrow\ & 8x-2=(4x-1)(3\sqrt{x}+\sqrt{2+x}) \\
\Leftrightarrow\ & (4x-1)(3\sqrt{x}+\sqrt{2+x}-2)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4x-1=0 \\ 3\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=2 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \\ 16x^2-28x+1=0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Giải hệ tuyển hai phương trình trên, ta được
$x=\dfrac{1}{4}, x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{8}, x=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{8}$ là nghiệm cần tìm.

1.1.3. Đặt ẩn phụ

Nội dung của phương pháp này là đặt một biểu thức chứa căn thức bằng một biểu thức theo ẩn mới mà ta gọi là ẩn phụ, rồi chuyển phương trình đã cho về phương trình với ẩn phụ vừa đặt. Giải phương trình theo ẩn phụ để tìm nghiệm rồi thay vào biểu thức vừa đặt để tìm nghiệm theo ẩn ban đầu.

Với phương pháp này ta tiến hành theo các bước sau.

Bước 1. Chọn ẩn phụ và tìm điều kiện xác định của ẩn phụ.

Đây là bước quan trọng nhất, ta cần chọn biểu thức thích hợp để đặt làm ẩn phụ. Để làm tốt bước này ta cần phải xác định được mối quan hệ của các biểu thức có mặt trong phương trình. Cụ thể là, phải xác định được sự biểu diễn tường minh của một biểu thức qua một biểu thức khác trong phương trình đã cho.

Bước 2. Chuyển phương trình ban đầu về phương trình theo ẩn phụ vừa đặt và giải phương trình này.

Thông thường sau khi đặt ẩn phụ thì những phương trình thu được là những phương trình đơn giản hơn mà ta đã biết cách giải.

Bước 3. Giải phương trình với ẩn phụ đã biết để xác định nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét rằng, có rất nhiều cách để đặt ẩn phụ. Ta sẽ mô tả một số cách đặt ẩn phụ qua ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.6. Giải phương trình

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}. \tag{1.6}$$

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 1$

Phân tích. Ta có thể lựa chọn các cách chọn ẩn phụ như sau.

Cách 1. Ta nhận thấy $\sqrt{x-x^2}$ có thể biểu diễn qua $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ nhờ vào đẳng thức

$$(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^2=1+2\sqrt{x-x^2}. \tag{1.7}$$

Cụ thể nếu ta đặt $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=t, t\ge 0$ thì $\sqrt{x-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}\cdot$

Khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai với ẩn t là

$$1+\frac{t^2-1}{3}=t \text{ hay } t^2-3t+2=0 \text{ suy ra } t=1, t=2.$$

Với $t=1$, ta có $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$ hay $2\sqrt{x-x^2}=0$, suy ra $x=0$ hoặc $x=1$.

Với $t=2$, ta có $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2$ vô nghiệm.

Vậy $x=0, x=1$ là nghiệm phương trình.

Ta nhận thấy cách giải trên dựa theo mối liên hệ đó là đẳng thức (1.7). Ngoài ra, ta có thể ta có thể tạo ra mối quan hệ khác giữa các đối tượng tham gia phương trình theo cách sau.

Cách 2. Từ phương trình đã cho ta có thể rút ra được một căn thức theo biểu thức chứa căn còn lại là

$\sqrt{x} = \dfrac{3\sqrt{1-x}-3}{2\sqrt{1-x}-3}\cdot$ Do đó, nếu ta đặt $\sqrt{1-x} = t, t \geq 0.$

Khi đó ta có $\sqrt{x} = \dfrac{3t-3}{2t-3}\cdot$ Và từ đẳng thức

$$(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = x + 1 - x = 1 \tag{1.8}$$

ta thu được phương trình $t(t-1)(2t^2-4t+3) = 0$ có nghiệm $t = 0$ và $t = 1$, hay $x = 1, x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 3. Nhận xét rằng phương trình đã cho chỉ chứa tổng và tích của hai biểu thức chứa căn và chúng thoả mãn (1.8), do đó ta có thể đặt $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{1-x} = b, a \geq 0, b \geq 0$. Từ phương trình đã cho kết hợp với (1.8) ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{2}{3}ab = a + b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại I. Giải hệ này ta thu được nghiệm của phương trình là $x = 0, x = 1$.

Tiếp tục nhận xét, ta thấy đẳng thức (1.8) giúp ta liên tưởng đến đẳng thức lượng giác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Điều này dẫn đến cách giải sau.

Cách 4. Đặt $x = \sin^2 t$, với $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (Điều này hoàn toàn hợp lí vì $x \in [0; 1]$ nên ứng với mỗi giá trị của x xác định duy nhất một giá trị của t).

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} (1.6) \Leftrightarrow\ & 1 + \frac{2}{3}\sin t.\cos t = \sin t + \cos t \\ \Leftrightarrow\ & 3(1-\sin t) + \sqrt{(1-\sin t)(1+\sin t)}(2\sin t - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{1-\sin x}[3\sqrt{1-\sin x} - (3-\sin 2x)\sqrt{1+\sin x}] = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\sin t = 1$ hoặc $3\sqrt{1-\sin t} = (3-2\sin t)\sqrt{1+\sin t}$
hay $\sin t(4\sin^2 - 8\sin t + 6) = 0$ suy ra $\sin t = 0$.

Vậy $x = 1; x = 0$ là nghiệm.

Nhận xét 1.4. Qua ví dụ trên ta thấy có nhiều cách đặt ẩn phụ để giải phương trình vô tỷ. Tuy nhiên đặt như thế nào cho phù hợp và cho cách giải hay là tuỳ thuộc vào kinh nghiệm phát hiện ra mối quan hệ đặc thù giữa các đối tượng tham gia trong phương trình. Sau đây là một số dạng toán và một số cách đặt ẩn phụ thường dùng.

Dạng 1. Phương trình dạng $F(\sqrt[n]{f(x)}) = 0$, với dạng này ta đặt $\sqrt[n]{f(x)} = t$ (nếu n chẵn thì phải có điều kiện $t \geq 0$) và chuyển về phương trình $F(t) = 0$. Giải phương trình này ta tìm được t, tiếp theo suy ra x từ phương trình $\sqrt[n]{f(x)} = t$.

Ta thường gặp phương trình có dạng như sau $af(x)^2 + bf(x) + c = 0$.

Ví dụ 1.7 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4 Trường THPT Chuyên Chu Văn An, Ninh Thuận)**.** Giải phương trình

$$2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}.$$

Giải. Điều kiện $x^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Khai triển phương trình đã cho như sau

$$(1.7) \Leftrightarrow\ 3(x-1) + 2(x^2 + x + 1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2 + x + 1)}.$$

Ta nhận thấy $x = 1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình trên cho $x - 1$, ta được phương trình

$$3 + 2\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} - 7\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = 0.$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = t, t \geq 0$. Khi đó ta có phương trình

$2t^2 - 7t + 3 = 0$ suy ra $t = 3$ hoặc $t = \dfrac{1}{2}$

Với $t = 3$, ta có $x^2 - 8x + 10 = 0$ hay $x = 4 \pm \sqrt{6}$ (thỏa mãn điều kiện).

Với $t = \dfrac{1}{2}$, ta có $4x^2 + 3x + 5 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Ví dụ 1.8. Giải phương trình

$$x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31. \quad (1.9)$$

Giải. Đặt $\sqrt{x^2+11} = t$, $t \geq 0$. Ta có

$$(1.9) \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -7 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $t = 6$ ta có $\sqrt{x^2+11} = 6$ suy ra $x = \pm 5$ là nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm 5$.

Ví dụ 1.9. Giải phương trình

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} - 2 = 0$$

Giải. Điều kiện $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Đặt $t = \sqrt[6]{x-1}, t \geq 0$ phương trình đã cho trở thành

$t^3 + t^2 - 2 = 0$ hay $(t-1)(t^2+2t+2) = 0$ suy ra $t = 1$.

Với $t = 1$ ta có $\sqrt[6]{x-1} = 1$ suy ra $x = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Nhận xét 1.5. Các phương trình có chứa các biểu thức $\sqrt[n_1]{f(x)}$, $\sqrt[n_2]{f(x)}$, $\sqrt[n_3]{f(x)}, \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt[n_n]{f(x)}$ thì ta giải phương trình bằng cách đặt $t = \sqrt[n]{f(x)}$ trong đó n là bội số chung nhỏ nhất của các số $n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots n_n$.

Dạng 2. Trong phương trình có chứa $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ và $\sqrt{f(x).g(x)}$. Khi gặp phương trình dạng này ta đặt $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = t$ sau đó bình phương hai vế ta sẽ biểu diễn được những đại lượng còn lại qua t và chuyển phương trình ban đầu về phương trình bậc hai đối với t.

Ví dụ 1.10. Giải phương trình

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 + \sqrt{(3+x)(6-x)}.$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} 3 + x \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6.$

Đặt $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=t, t\geq 0$ suy ra

$$t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}. \tag{1.10}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9$ nên từ (1.10), suy ra $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho trở thành $t = 3 + \dfrac{t^2-9}{2}$ hay $t^2 - 2t - 3 = 0$ có nghiệm $t = 3$ (thỏa mãn). Thay vào (1.10), ta được phương trình $\sqrt{(3+x)(6-x)} = 0$ có $x = 3, x = 6$ là nghiệm.

Ví dụ 1.11. Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16.$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} 2x+3\geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$

Đặt $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} = t$, $t\geq 0$, suy ra

$$t^2 = 3x + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} + 4. \tag{1.11}$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $t = t^2 - 20$ hay $t^2 - t - 20 = 0$ suy ra $t = 5$ (do $t \geq 0$).

Thay $t = 5$ vào (1.11), ta được

$$\begin{aligned}
(1.11) \Leftrightarrow\ & 21 - 3x = 2\sqrt{2x^2+5x+3} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 21 - 3x \geq 0 \\ 441 - 126x + 9x^2 = 8x^2 + 20x + 12 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -1 \leq x \leq 7 \\ x^2 - 146x + 429 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = 3.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.12. Giải phương trình

$$x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3}) = 30.$$

Giải. Đặt $x+\sqrt[3]{35-x^3} = t$ suy ra $t^3 = 35 + 3x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})$ hay

$$x\sqrt[3]{35-x^3} = \frac{t^3-35}{3t} \tag{1.12}$$

(vì t=0 không là nghiệm của phương trình).
Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{t^3 - 35}{3t} t = 30 \text{ suy ra } t = 5.$$

Thay vào (1.12), ta được

$$\begin{aligned}(1.12) \Leftrightarrow\ & x\sqrt[3]{35 - x^3} = 6 \\ \Leftrightarrow\ & x^3(35 - x^3) = 216 \\ \Leftrightarrow\ & x^6 - 35x^3 + 216 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 \text{ hoặc } x = 3.\end{aligned}$$

Dạng 3. Phương trình dạng $a\sqrt[n]{f(x)} + b\sqrt[2n]{f(x)g(x)} + c\sqrt[n]{g(x)} = 0$ (Với $g(x) \neq 0$).

Để giải phương trình dạng này ta chia hai vế phương trình cho $\sqrt[n]{g(x)}$ và đặt $\sqrt[2n]{\dfrac{f(x)}{g(x)}} = t, t \geq 0$ ta được phương trình bậc hai đối với ẩn t có dạng $at^2 + bt + c = 0$.

Ví dụ 1.13. Giải phương trình

$$10\sqrt{x^3 + 8} = 3(x^2 - x + 6). \qquad (1.13)$$

Giải. Điều kiện $x^3 + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Ta có

$$(1.13) \Leftrightarrow 10\sqrt{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = 3[(x + 2) + (x^2 - 2x + 4)].$$

Chia hai vế cho $x^2 - 2x + 4$ (do $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ với mọi x).

Ta được phương trình

$10\sqrt{\dfrac{x + 2}{x^2 - 2x + 4}} = 3[\dfrac{x + 2}{x^2 - 2x + 4} + 1]$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x + 2}{x^2 - 2x + 4}} = u, u \geq 0$ phương trình với ẩn u có dạng

$3u^2 - 10u + 3 = 0$ hay $u = 3$ hoặc $u = \dfrac{1}{3}\cdot$

Với $u = 3$, ta có $\sqrt{\dfrac{x + 2}{x^2 - 2x + 4}} = 3$, hay $9x^2 - 19x + 34 = 0$ vô nghiệm.

Với $u = \dfrac{1}{3}$ ta có $\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}} = \dfrac{1}{3}$

hay $x^2 - 11x - 14 = 0$. Suy ra $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{177}}{2}\cdot$

Ví dụ 1.14. Giải phương trình

$$5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2). \tag{1.14}$$

Giải. Điều kiện $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Ta có

$$(1.14) \Leftrightarrow\ 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2-x+1) + 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\ 2\frac{x+1}{x^2-x+1} - 5\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} + 2 = 0 \text{ (do } x^2 - x + 1 > 0 \text{ với mọi } x).$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}} = t$ với $t \geq 0$ ta có phương trình

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \text{ suy ra} t = 2 \text{ hoặc } t = \frac{1}{2}\cdot$$

Với $t = 2$ ta có

$$\frac{x+1}{x^2-x+1} = 4 \text{ hay} 4x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

Với $t = \dfrac{1}{2}$ ta có

$$\frac{x+1}{x^2-x+1} = \frac{1}{4} \text{ hay } x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}\cdot$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

Dạng 4. $p(x)f(x) + g(x)\sqrt{f(x)} + h(x) = 0$.

Với dạng phương trình này ta có thể đặt $\sqrt{f(x)} = t, t \geq 0$.

Khi đó ta được phương trình theo ẩn t là

$p(x)t^2 + g(x)t + h(x) = 0$, ta giải phương trình này theo t, xem x là tham số (ta tìm được t theo x) nên ta gọi dạng này là dạng ẩn phụ không triệt để.

Ví dụ 1.15. Giải phương trình

$$2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2-6x-1.$$

Giải. Điều kiện $x^2+2x-1 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2+2x-1} = t, t \geq 0$ ta được phương trình

$t^2-2(1-x)t-4x=0$. Đây là phương trình bậc hai ẩn t ta coi x là tham số có $\Delta' = (x+1)^2$, do đó phương trình này có hai nghiệm $t=2, t=-2x$.

Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2+2x-1}=2$ hay $x^2+2x-5=0$ suy ra $x=-1\pm\sqrt{6}$.

Với $t=-2x$ ta có $\sqrt{x^2+2x-1}=-2x$ hay $\begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2-2x+1=0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn là $x=-1\pm\sqrt{6}$.

Ví dụ 1.16 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4 THPT Bạc Liêu)**.** Giải phương trình

$$x^2+(3-\sqrt{x^2+2})x = 1+2\sqrt{x^2+2}.$$

Giải.

Đặt $\sqrt{x^2+2}=t, t\geq 0$ ta có $x^2=t^2-2$ nên phương trình đã cho trở thành

$t^2-(2+x)t-3+3x=0$ hay $t=3$ hoặc $t=x-1$.

Với $t=3$ ta có $\sqrt{x^2+2}=3$ suy ra $x=\pm\sqrt{7}$.

Với $t=x-1$ ta có $\sqrt{x^2+2}=x-1$

suy ra $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2+2=x^2-2x+1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\sqrt{7}$.

1.1.4. Phương pháp đưa về hệ không đối xứng

Phương trình có dạng sau

$A(\sqrt[n]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)})+B\sqrt[n]{f(x)}\sqrt[m]{g(x)}+C=0$ với $(af(x)\pm bg(x)=D)$ trong đó A, B, C, D, a, b là các hằng số.

Đặt $\begin{cases} \sqrt[n]{f(x)}=u \\ \sqrt[m]{g(x)}=v \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành hệ phương trình "hữu tỷ".

$\begin{cases} A(u\pm v)+Buv+C=0 \\ au^n+bv^m=D \end{cases}$

Ví dụ 1.17. Giải phương trình

$$2(\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x+1})+3\sqrt{x-1}.\sqrt[3]{x+1}+7=0.$$

Giải Điều kiện $x \geq 1$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1}=u, u \geq 0 \\ \sqrt[3]{x+1}=v \end{cases}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 2(u-v)+3uv+7=0 \\ u-v=-2 \end{cases}$

Rút u từ phương trình thứ hai của hệ ta được $u = v-2$ thay vào phương trình đầu ta có

$3v^2-6v+3=0$ suy ra $v=1$ thỏa mãn.

Vậy $x+1=1$ không thỏa mãn điều kiện.

Phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1.18. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6.$$

Giải. Điều kiện $12-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 12$.

Đặt $\sqrt[3]{24+x}=u, \sqrt{12-x}=v$ suy ra $u \leq \sqrt[3]{36}, v \geq 0$.

Ta có $\begin{cases} u+v=6 \\ u^3+v^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u^3+(6-u)^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u \\ u(u^2+u-12)=0 \end{cases}$

Suy ra $u=0; u=-4; u=3$ là nghiệm thoả mãn điều kiện.

Từ đây ta được $x=-24; x=-88; x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-24; x=-88; x=3$.

Ví dụ 1.19. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1.$$

Giải Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\begin{cases} u^3=x+7 \\ v^2=x \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} u \geq \sqrt[3]{7} \\ v \geq 0 \end{cases}$

Ta có hệ $\begin{cases} u-v=1 \\ u^3-v^2=7 \end{cases}$

Rút v từ phương trình thứ nhất của hệ ta được

$v=u-v$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $u^3-(u-1)^2=7$ hay $u^3-u^2+2u-8=0$ suy ra $(u-2)(u^2+u+4)=0$. Phương trình này có nghiệm $u=2$ vậy $v=1$.

Trở về tìm x ta giải

$\begin{cases} u^3 = 8 \\ v^2 = 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x + 7 = 8 \\ x = 1 \end{cases}$ suy ra $x = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Một số ví dụ khác

Ví dụ 1.20. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = -1.$$

Giải Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt[4]{x} = u \\ \sqrt[4]{1-x} = v \end{cases}$ với $u \geq 0, v \geq 0$.

Từ điều kiện và từ phương trình đã cho ta có hệ

$\begin{cases} u^4 + v^4 = 1 \\ u^2 + v^2 - 2uv + 1 - 2u^2v^2 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u^4 + v^4 = 1 \\ (u - v)^2 + (u^2 - v^2)^2 = 0 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} u - v = 0 \\ u^2 - v^2 = 0 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} u = v \\ u^4 = v^4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Trở về tìm x ta được

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ 1 - x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ suy ra $x = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 1.21. Giải phương trình

$$\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}$$

Giải Điều kiện $x \geq \dfrac{5}{3}$.

Đặt $u = \sqrt{8x+1}, v = \sqrt{3x-5}, z = \sqrt{7x+4}, t = \sqrt{2x-2}$ với u, v, z, t không âm.

Từ cách đặt và phương trình đã cho ta thu được hệ

$\begin{cases} u + v = z + t \\ u^2 - v^2 = z^2 - t^2 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta thu được $(u+v)(u-v) = (z+t)(z-t)$.

Lại do $u + v > 0$ vì $u \geq 0, v \geq 0$, u, v không đồng thời bằng 0, ta thu được $u - v = z - t$ kết hợp với phương trình đầu của hệ suy ra $u = z$.

Từ đó ta được $\sqrt{8x+1} = \sqrt{7x+4}$ suy ra $x = 3$. (thỏa mãn).

Vậy $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

1.1.5. Phương pháp lượng giác hóa

- Nếu phương trình chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ đặt $x = |a| \sin t$ với $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x = |a| \cos t$ với $0 \leq x \leq \pi$.

- Nếu phương trình chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ đặt $x = \dfrac{|a|}{\sin t}$ với $t \in \Big[-\dfrac{\pi}{2}; 0)$ hoặc $t \in (0; \dfrac{\pi}{2}\Big]\cdot$ Đặt $x = \dfrac{|a|}{\cos t}$ với $t \in \Big[0; \dfrac{\pi}{2}\Big)$ hoặc $t \in \Big(\dfrac{\pi}{2}; \pi\Big]\cdot$

- Nếu phương trình chứa $\sqrt{x^2 + a^2}$ đặt $x = |a| \tan t$ với $t \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big)\cdot$

- Nếu phương trình chứa $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ đặt $x = a \cos 2t$.

- Nếu phương trình chứa $\sqrt{(a-x)(b-x)}$ đặt $x = a + (b-a)\sin^2 t$.

Ví dụ 1.22. Giải phương trình

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2}).$$

Giải. Điều kiện $|x| \leq 1$.

Đặt $x = \sin t$ với $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Khi đó

$$\begin{aligned}
(1.22) \Leftrightarrow\ & \sqrt{1 + \cos t} = \sin t(1 + 2\cos t) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t = 2 \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{t}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos \frac{t}{2}(\sqrt{2} \sin \frac{3t}{2} - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos \dfrac{t}{2} = 0 \\ \cos \dfrac{3t}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Suy ra $t = (2k+1)\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ hoặc $t = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{4\pi}{3}$ hoặc $t = \dfrac{5\pi}{6} + k\dfrac{4\pi}{3}$ kết hợp điều kiện ta có $t = \dfrac{\pi}{6}\cdot$

Vậy $x = \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Ví dụ 1.23. Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}. \qquad (1.15)$$

Giải. Điều kiện $x \geq -2$.

Với $x < -2$ phương trình không xác định.

Với $x > 2$ ta có $x^3 - 3x = x + x(x^2 - 4) > x > \sqrt{x+2}$.

Vậy để giải phương trình ta chỉ cần xét $t \in [-2; 2]$.

Đặt $x = 2\cos t$ với $t \in [0; \pi]$. Khi đó

$$(1.15) \Leftrightarrow \cos 3t = \cos \frac{t}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{k4\pi}{5} \\ t = \dfrac{k7\pi}{7} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $t = \dfrac{4\pi}{5}$, $t = \dfrac{4\pi}{7}$, $t = 0$.

Vậy $x = 2$, $x = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$, $x = 2\cos\dfrac{4\pi}{7}\cdot$

Ví dụ 1.24. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}\cdot \qquad (1.16)$$

Giải. Điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq \pm 1$.

Đặt $x = \tan t$ với $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $t \neq 0$ và $t \neq \pm\dfrac{\pi}{4}\cdot$

Ta có

$$(1.16) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin 2t} = \frac{2}{\sin 4t}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos t}(1 + \frac{1}{2\sin t} - \frac{1}{2\sin t.\cos 2t}) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin t.\cos 2t + \cos 2t - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin t(1 - 2\sin^2 t) - 2\sin^2 t = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin t(1 - \sin t - 2\sin^2 t) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \sin t = -1 \\ \sin t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ t = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện của t ta có $t = \dfrac{\pi}{6}\cdot$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot$

1.1.6. Phương pháp sử dụng nhiều hơn một ẩn phụ

Ví dụ 1.25. Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3. \qquad (1.17)$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} 4x^2+5x+1 \geq 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{4x^2+5x+1} = a \\ 2\sqrt{x^2-x+1} = b \end{cases} \quad a \geq 0, b \geq 0.$

Khi đó

$$\begin{aligned}
(1.17) &\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 9x-3 \\
&\Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b-1=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ \begin{cases} a-b = 9x-3 \\ 2a = 9x-2 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ x = 0 \\ x = \dfrac{56}{65} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \dfrac{1}{3}; x = 0; x = \dfrac{56}{65}\cdot$

Ví dụ 1.26. Giải phương trình

$$2(x^2-3x+2) = 3\sqrt{x^3+8}. \qquad (1.18)$$

Giải. Điều kiện $x^3+8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Đặt $u = \sqrt{x^2-2x+4}; v = \sqrt{x+2}, u \geq 0, v \geq 0.$

Ta có $u^2 - v^2 = x^2 - 3x + 2.$

Lúc đó

$$
\begin{aligned}
(1.18) \Leftrightarrow\ & 2(u^2 - v^2) = 3uv \\
\Leftrightarrow\ & (2u + v)(u - 2v) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u = 2v \text{ (do 2u+v >0).}
\end{aligned}
$$

Tìm x ta giải

$\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2\sqrt{x + 2} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm 13$(thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3 + \sqrt{13}; x = 3 - \sqrt{13}$.

Ví dụ 1.27. Giải phương trình

$$x = \sqrt{3 - x}\sqrt{4 - x} + \sqrt{5 - x}\sqrt{4 - x} + \sqrt{3 - x}\sqrt{5 - x}.$$

Giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 3$.

Đặt $\sqrt{3 - x} = a; \sqrt{4 - x} = b, \sqrt{5 - x} = c; a, b, c \geq 0$ ta có hệ phương trình.

$\begin{cases} ab + bc + ca = 3 - a^2 \\ ab + bc + ac = 4 - b^2 \\ ab + bc + ac = 5 - c^2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} (a + c)(a + b) = 3 \\ (b + c)(b + a) = 4 \\ (c + a)(c + b) = 5 \end{cases}$

Suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) = 2\sqrt{15}$.

Vậy $\begin{cases} a + b = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ b + c = 2\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ c + a = \sqrt{\dfrac{15}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{23}{4\sqrt{15}} \\ b = \dfrac{17}{4\sqrt{15}} \\ c = \dfrac{7}{4\sqrt{15}} \end{cases}$ suy ra $x = \dfrac{671}{240}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 1.28. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x + 1} + \sqrt[3]{5 - x} + \sqrt[3]{2x - 9} - \sqrt[3]{4x - 3} = 0.$$

Giải. Đặt $\sqrt[3]{3x + 1} = a; \sqrt[3]{5 - x} = b; \sqrt[3]{2x - 9} = c$.

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 4x - 3$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ hay $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$ suy ra $a = -b$ hoặc $a = -c$ hoặc $b = -c$.

Giải ra ta được nghiệm phương trình là $x = -3; x = 4; x = \dfrac{8}{5}$.

1.2. Phương pháp ứng dụng các tính chất của hàm số

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu thực sự, liên tục trên tập D thì phương trình $f(x) = k$ với k là hằng số, nếu có nghiệm $x = x_0$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập D và $u(x), v(x)$ là các hàm số nhận các giá trị thuộc D thì $f(u(x)) = f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

Một số lưu ý khi sử dụng phương pháp hàm số.

Vấn đề quan trọng khi sử dụng phương pháp hàm số là chúng ta phải nhận ra được hàm số đơn điệu và "nhẩm hoặc tính được nghiệm của phương trình việc này có thể nhờ máy tính".

Để phát hiện được tính đơn điệu của hàm số ta cần nắm vững các tính chất.

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D thì khi đó.

- Hàm số $y = \sqrt[n]{f(x)}$ đồng biến hoặc nghịch biến trên D.
- Hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ với $f(x) > 0$ nghịch biến hoặc đồng biến trên D.
- Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến hoặc đồng biến trên D.
- Tổng của các hàm đồng biến hoặc nghịch biến trên D là hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên D.
- Tích của các hàm số dương đồng biến hoặc nghịch biến trên D là một hàm đồng biến hoặc nghịch biến trên D.

Ví dụ 1.29. Từ tính đơn điệu của các hàm số $y = x + 3, y = 3 - x$ và $y = 2 - x$ nếu nắm được tính chất trên ta phát hiện ra ngay các hàm số $y = \sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3} + x$ là đồng biến trên tập xác định.

Hàm số $y = \sqrt{\dfrac{6}{3-x}} + \sqrt{\dfrac{8}{2-x}}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

Hàm số $y = \dfrac{1}{x+3} + \sqrt{3-x}$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

Ví dụ 1.30. Giải phương trình

$$\sqrt{5x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x - 1} + x = 4.$$

Nhận xét 1.6. Quan sát vế trái của phương trình, từ tính đồng biến nghịch biến của hàm bậc nhất và tính chất đơn điệu của hàm số đã nêu ở trên, ta thấy vế trái của phương trình là hàm đồng biến trên tập xác định. Vế phải của phương trình là hàm hằng nên ta sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải bài toán.

Giải. Điều kiện $5x^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} + 1$ với mọi $x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)$ nên hàm số đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}; +\infty\right)\cdot$

Mà $f(1) = 4$ tức $x = 1$ là một nghiệm của phương trình.

Ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất của phương trình thật vậy.

- Nếu $x > 1$ thì $f(x) > f(1) = 4$ suy ra phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \leq x < 1$ thì $f(x) < f(1) = 4$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 1.31 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4 Trường Chuyên Lê Quý Đôn Bà Rịa -Vũng Tàu)**.** Giải phương trình

$$\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1. \tag{1.19}$$

Giải. Ta có

$$(1.19) \Leftrightarrow \ 6x + 1 + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ là số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $\sqrt[3]{6x+1} = 2x$ suy ra $8x^3 - 6x = 1$. Nhận xét nếu $|x| > 1$ thì $4x^3 - 3 > 1$, suy ra $|8x^3 - 6x| = 2|x|(4x^2 - 3) > 2$.

Nên nghiệm nghiệm của phương trình đã cho phải thuộc $[-1; 1]$.

Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$ khi đó phương trình đã cho trở thành.

$4\cos^3 t - 3\cos t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \pm\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{R}.$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x = \cos\dfrac{\pi}{9}, x = \cos\dfrac{5\pi}{9}, x = \cos\dfrac{7\pi}{9}$

Ví dụ 1.32. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{3}.$$

Giải.

Điều kiện
$\begin{cases} 2x^3+3x^2+6x+16 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$

Phương trình đã cho có dạng $f(x) = 2\sqrt{3}$.

Trong đó $f(x) = \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x}$.

$f'(x) = \dfrac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$ với mọi $x \in (-2;4)$ nên hàm số đồng biến trên $[-2;4]$.

Mà $f(1) = 2\sqrt{3}$, từ đó ta có $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 1.33. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x+1}.$$

Giải. Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t+1}$, ta có phương trình $f(x+1) = f(2x^2)$.

Vì $f(t) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t+1}$ liên tục và đồng biến trên tập xác định nên
$f(x+1) = f(2x^2) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -\dfrac{1}{2}\cdot$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1, x = -\dfrac{1}{2}\cdot$

1.3. Phương pháp đưa về hệ đối xứng

1.3.1. Phương trình dạng $\sqrt[n]{a+f(x)} + \sqrt[n]{b-f(x)} = c$

Đặt $u = \sqrt[n]{a+f(x)}, v = \sqrt[n]{b-f(x)}$

Như vậy ta có hệ
$\begin{cases} u+v=c \\ u^n+v^n=a+b \end{cases}$ là hệ đối xứng loại I.

Ví dụ 1.34. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{57-x} + \sqrt[4]{x+40} = 5. \qquad (1.20)$$

Giải. Điều kiện $-40 \leq x \leq 57$.

Đặt $u = \sqrt[4]{57 - x}$ và $v = \sqrt[4]{x + 40}$ $u \geq 0, v \geq 0$. Ta có

$$(1.20) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ [(u+v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 = 97 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ 2(uv)^2 - 100uv + 528 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ \left[\begin{array}{l} uv = 6 \\ uv = 44. \end{array} \right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 44. \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Với $u = 3$ và $v = 3$ ta có

$$\begin{cases} \sqrt[4]{57 - x} = 2 \\ \sqrt[4]{x + 40} = 3 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} 57 - x = 16 \\ x + 40 = 81 \end{cases} \text{ suy ra } x = 41$$

Với $u = 3$ và $v = 2$ ta có hệ

$$\begin{cases} 57 - x = 81 \\ x + 40 = 81 \end{cases} \text{ suy ra } x = 24.$$

Vậy $x = 41$ hoặc $x = 24$ là nghiệm phương trình.

Nhận xét 1.7. Xét về mặt nào đó cách dùng ẩn phụ dưới dạng này có vẻ ngược với việc ta thường làm "Chuyển thành bài toán nhiều ẩn nhiều phương trình hơn bài toán ban đầu". Ở đây do tính chất phức tạp của bài toán mà ta đành chịu "thiệt" về số lượng tức làm tăng số ẩn và phương trình nhưng lại được cái cơ bản là chuyển được từ bài toán khó về bài toán dễ hơn.

Ví dụ 1.35. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{7 + \tan x} + \sqrt[3]{2 - \tan x} = 3.$$

Giải.

Điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{7 + \tan x} \\ v = \sqrt[3]{2 - \tan x} \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} u^3 = 7 + \tan x \\ v^3 = 2 - \tan x \end{cases}$

Từ phương trình đã cho và từ công thức đặt ẩn phụ ta thu được hệ $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u + v = 3 \\ (u+v)[(u+v)^2 - 3uv] = 9 \end{cases}$ suy ra $u = 2, v = 3$ hoặc $u = 1, v = 2$.

Trở về tìm x giải

Hệ $\begin{cases} 7 + \tan x = 8 \\ 2 - \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

Hệ $\begin{cases} 7 + \tan x = 1 \\ 2 - tgx = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \tan x = -6 = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + l\pi$

$(k, l \in \mathbb{Z})$.

1.3.2. Phương trình dạng $\sqrt[n]{ax+b} = r(ux+v)^n + dx + e$

$a \neq 0, u \neq 0, r \neq 0$ Với các hệ số thỏa mãn $\begin{cases} u = ar + d \\ v = br + e \end{cases}$

Cách giải. Đặt $\sqrt[n]{ax+b} = uy + v$.

Sau đó đưa về hệ $\begin{cases} (uy+v)^n = \dfrac{1}{r}(ux+v) - \dfrac{d}{r}x - \dfrac{e}{r} \\ (ux+v)^n = \dfrac{1}{r}(uy+v) - \dfrac{d}{r}x - \dfrac{e}{r} \end{cases}$ đây là hệ đối xứng loại II được giải bằng cách trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ để được một phương trình tích.

Ví dụ 1.36 (Tạp chí toán học tuổi trẻ số 303)**.** Giải phương trình

$$\sqrt{2x+15} = 32x^2 + 32x - 20. \qquad (1.21)$$

Giải. Điều kiện $x \geq -\dfrac{15}{2}$.

Biến đổi phương trình đã cho trở thành $\sqrt{2x+15} = 2(4x+2)^2 - 28$.

Đặt ẩn phụ $\sqrt{2x+15} = 4y + 2 \Leftrightarrow (4y+2)^2 = 2x + 15$ $(4y + 2 \geq 0)$.

Khi đó

$$(1.21) \Leftrightarrow (4x+2)^2 = 2y + 15.$$

Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(4x+2)^2 = 2y+15\\(4y+2)^2 = 2x+15\end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại hai.

Giải hệ trên bằng cách trừ vế với vế của hai phương trình ta được nghiệm là $x = \frac{1}{2}, x = \frac{-9-\sqrt{221}}{16}$.

Ví dụ 1.37. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25. \qquad (1.22)$$

Giải.

$$(1.22) \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5} = (2x-3)^3 - x + 2.$$

Đặt $\sqrt[3]{3x-5} = 2y-3$ suy ra $(2x-3)^3 = 3x-5$, khi đó ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases}(2x-3)^3 = 2y-3+x-2\\(2y-3)^3 = 2x-3+x-2\end{cases}$$

Giải hệ trên bằng cách trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ sau đó thế trở lại phương trình đầu ta được phương trình

$(x-2)(8x^2-20x+11) = 0$ suy ra $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x = 2, x = \frac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

1.3.3. Phương trình dạng $(f(x))^n + b = a\sqrt[n]{af(x)-b}$

Cách giải. Đặt $\sqrt[n]{af(x)-b} = t$ ta có hệ $\begin{cases}(f(x))^n + b = at\\t^n + b = af(x)\end{cases}$ đây là hệ đối xứng loại II.

Ví dụ 1.38. Giải phương trình

$$x^2 - 4 = \sqrt{x+4}.$$

Giải. Điều kiện $x \geq -4$.

Đặt $\sqrt{x+4} = t$ thì ta có hệ sau $\begin{cases} x^2 = t+4 \\ t^2 = x+4 \end{cases}$

Trừ vế với vế của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai trong hệ ta được $x^2 - t^2 = t - x$ hay $(x-t)(x+t+1) = 0$ suy ra $t = x$ hoặc $t = -1 - x (t \geq 0)$.

Với $t = x$ ta có $x^2 = x + 4$ hay $x^2 - x - 4 = 0$ suy ra $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ so sánh điều kiện $x = t \geq 0$ ta có nghiệm phương trình là $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\cdot$

Với $t = -1 - x$ khi đó phương trình $x^2 = 3 - x$ hay $x^2 + x - 3 = 0$ suy ra $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ so sánh điều kiện ta được $x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\cdot$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}; x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\cdot$

Ví dụ 1.39 (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Thái Nguyên Lớp 10 năm 2011)**.** Giải phương trình sau

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Giải. Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1}$ kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$ trừ vế với vế của phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai của hệ ta được $(x-y)(x^2+y^2+xy+2) = 0$ hay $x = y$ (do $x^2 + y^2 + xy + 2 > 0$ với mọi x, y).

Thay lại được $x^3 - 2x + 1 = 0$ suy ra $x = 1, x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot$

1.3.4. Phương trình dạng $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$

Cách giải. Đặt $a + \sqrt{x} = t$ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x = a + \sqrt{t} \\ t = a + \sqrt{x} \end{cases}$ là hệ đối xứng loại II.

Ví dụ 1.40. Giải phương trình

$$x = 2007 + \sqrt{2007 + \sqrt{x}}.$$

Giải. Điều kiện $x \geq 0$. Đặt $2007 + \sqrt{x} = t$. Ta được hệ phương trình
$\begin{cases} x = 2007 + \sqrt{t} \\ t = 2007 + \sqrt{x} \end{cases}$

Lấy phương trình đầu trừ đi phương trình thứ hai vế với vế ta được $x - t = \sqrt{t} - \sqrt{x}$ hay $(\sqrt{t} - \sqrt{x})(\sqrt{t} + \sqrt{x} + 1) = 0$ suy ra $x = t$.

Khi đó ta có phương trình $x - \sqrt{x} - 2007 = 0$ suy ra $x = \dfrac{8030 + 2\sqrt{8029}}{4}$ (do $x \geq 0$).

1.3.5. Phương trình dạng $\sqrt[n]{ax+b} = r(ux+v)^n + e$.

Với $a \neq 0, u \neq 0, r \neq 0$.

Với các hệ số thỏa mãn $\begin{cases} u = ar \\ v = br + e \end{cases}$

Cách giải đặt $\sqrt[n]{ax+b} = uy + v$. Sau đó đưa về hệ $\begin{cases} (uy+v)^n = \dfrac{1}{r}(ux+v) - \dfrac{e}{r} \\ (ux+v)^n = \dfrac{1}{r}(uy+v) - \dfrac{e}{r} \end{cases}$ hệ này được giải như hệ đối xứng loại II bằng cách trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ để được một phương trình tích.

Ví dụ 1.41. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = 7x^2 + 7.$$

Giải. Điều kiện $x \geq -\dfrac{9}{4}\cdot$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} = 7(x + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{7}{4}\cdot$

Kiểm tra $a = \dfrac{1}{7}, b = \dfrac{9}{28}, r = 7, e = -\dfrac{7}{4}, u = 1, v = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Đặt $y + \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$

Ta có hệ $\begin{cases} (x + \dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{1}{7}(y + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{4} \\ (y + \dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{1}{7}(x + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Đây là hệ đối xứng loại II trừ vế với vế sau đó rút y theo x thế vào phương trình đầu giải ra ta được nghiệm phương trình là

$x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{50}}{14}, x = \dfrac{-49 \pm \sqrt{3997}}{84}\cdot$

1.4. Phương trình giải bằng phương pháp so sánh

1.4.1. Áp dụng tính chất đơn điệu của hàm số để giải phương trình vô tỷ

Ta áp dụng tính nghịch biến của hàm $y = a^x$ khi $0 < a < 1$ và đồng biến khi a>1 để giải phương trình chứa căn.

Ví dụ 1.42. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x} = 1.$$

Giải. Điều kiện $0 \le x \le 1$.
Từ điều kiện suy ra
$\sqrt[4]{x} \ge x$, $\sqrt[4]{1-x} \ge 1 - x \ge 1 - \sqrt[4]{x}$.
Vậy $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x} \ge 1$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, x = 1$.
Đáp số $x = 0, x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1.43. Giải phương trình

$$5\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{1-5x} = 1.$$

Giải. Điều kiện $0 \le x \le \dfrac{1}{5}$.
Từ điều kiện suy ra
$5\sqrt[4]{x} \ge 5x$, $\sqrt[8]{1-5x} \ge 1 - 5x \ge 1 - 5\sqrt[4]{x}$.
Vậy $5\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{1-5x} \ge 1$.
Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.
Đáp số $x = 0$.

1.4.2. Sử dụng bất đẳng thức luỹ thừa để giải một số phương trình vô tỷ

Một số bất đẳng thức lưu ý.
1- Với $A, B > 0$ ta có
$\dfrac{\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}}{2} \le \sqrt[n]{\dfrac{A+B}{2}}$ (*).
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B$.

2- Với $A, B, C > 0$ ta có
$\dfrac{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}}{3} \geq \sqrt[n]{\dfrac{A+B+C}{3}}$ (**).
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$.
Ta chứng minh các bất đẳng thức trên
Với $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, ta có bất đẳng thức
$a^{m+n} + b^{m+n} \geq \dfrac{1}{2}(a^m + b^m)(a^n + b^n)$.
Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với
$a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m \Leftrightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$ (hiển nhiên đúng).
Ta có
$\dfrac{a^n+b^n}{2} \geq \dfrac{1}{2^2}(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1}) \geq \cdots \geq \dfrac{1}{2^n}(a+b)^n$.
Đặt $a^n = A, b^n = B$ ta được bất đẳng thức (*). Ta chứng minh
$\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3} \geq \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^n, a, b, c > 0$.
Xét $P = a^n + b^n + c^n + \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^n$
hay $P \geq 2\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^n + 2\Big(\dfrac{c+\frac{a+b+c}{3}}{2}\Big)^n \geq 4\Big(\dfrac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\Big)^n = 4\Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^n$
Vậy $\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3} \geq \Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^n$
Đặt $a^n = A, b^n = B, c^n = C$.
Biến đổi bất đẳng thức đã cho
$\dfrac{A+B+C}{3} \geq \Big(\dfrac{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}}{3}\Big)^n$ hay $\dfrac{\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}}{3} \leq \sqrt[n]{\dfrac{A+B+C}{3}}$
Bất đẳng thức (**) được chứng minh.

Ví dụ 1.44. Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2+x-4} + \sqrt{6-4x^2-x} = 2.$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} 4x^2+x-4 \geq 0 \\ 6-4x^2-x \geq 0 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có
$\sqrt{4x^2+x-4} + \sqrt{6-4x^2-x} \leq 2\sqrt{\dfrac{2}{2}} = 2$.

Dấu bằng xảy ra khi

$\sqrt{4x^2 + x - 4} = \sqrt{6 - 4x^2 - x}$ hay $4x^2 + x - 4 = 6 - 4x^2 - x$ suy ra $x = 1, x = -\dfrac{5}{4}$

Vậy nghiệm phương trình là $x = 1, x = -\dfrac{5}{4}$

Ví dụ 1.45. Giải phương trình

$$2\sqrt{x} + \sqrt{3 - 2x} = 3.$$

Giải. Điều kiện $0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có

$\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{3 - 2x} \leq 3\sqrt{\dfrac{x + x + 3 - 2x}{3}} = 3.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \sqrt{3 - 2x}$ suy ra $x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

1.4.3. Sử dụng một số bất đẳng thức quen thuộc so sánh các vế của phương trình vô tỷ

1-Bất đẳng thức Cauchy.

Với mọi bộ số (x_i, y_i) ta luôn có bất đẳng thức sau

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi bộ số (x_i) và (y_i) tỉ lệ nhau, tức là tồn tại cặp số thực α, β không đồng thời bằng 0, sao cho

$\alpha x_i + \beta y_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, 3, \dots n$

Áp dụng cho các số a, b, c, d ta có

$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$.

2-Bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

Cho n số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có $\dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Áp dụng cho hai số dương a, b ta có $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Ví dụ 1.46 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4 THPT Chuyên Bến tre)**.** Giải phương trình

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}.$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x \geq 0 \\ x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai cặp số sau

$a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{x+1}, c = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, d = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$, khi đó

$$\begin{aligned} \Big(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x}\Big)^2 &= \Big(2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\Big)^2 \\ &\leq (8+x+1)\Big(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}\Big) \end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \leq \sqrt{9+x}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ suy ra

$x = \dfrac{1}{7}\cdot$

Vậy $x = \dfrac{1}{7}$ là nghiệm phương trình.

Ví dụ 1.47 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4 Trường Chuyên Thăng Long Đà Lạt Lâm Đồng)**.** Giải phương trình

$$\sqrt{4x-1} + \sqrt[4]{8x-3} = 4x^4 - 3x^2 + 5x.$$

Giải. Điều kiện $8x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{8}\cdot$

Với điều kiện trên ta chia cả hai vế của phương trình trên cho x ta được

$\dfrac{\sqrt{4x-1}}{x} + \dfrac{\sqrt[4]{8x-3}}{x} = 4x^3 - 3x + 5.$

Theo bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$\dfrac{\sqrt{4x-1}}{x} \leq \dfrac{4x-1-1}{2x} = 2$ và $\dfrac{\sqrt[4]{8x-3}}{x} \leq \dfrac{8x-3+1+1+1}{4x} = 2$

Do đó $\dfrac{\sqrt{4x-1}}{x} + \dfrac{\sqrt[4]{8x-3}}{x} \leq 4.$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{1}{2}\cdot$

Mặt khác $4x^3 - 3x + 5 = 4x^3 - 3x + 1 + 4 = (2x-1)^2(x+1) + 4 \geq 4$ với $x \geq \dfrac{3}{8}\cdot$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{1}{3}\cdot$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}\cdot$

Ví dụ 1.48. Giải phương trình

$$x + \sqrt{2-x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}\cdot$$

Giải. Điều kiện $2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x \neq 0.$

Ta có $x + \sqrt{2-x^2} \leq 2, x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$

Hai vế phương trình bằng nhau khi và chỉ khi $x = 1.$

Đáp số $x = 1.$

Ví dụ 1.49. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1} = x^3 - 2x^2 + 2x.$$

Giải. Điều kiện $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}\cdot$

Biến đổi phương trinh đã cho thành $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} = 1 + (x-1)^2.$

Ta có $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} = 2\dfrac{\sqrt{1(2x-1)}}{2x} \leq 2\dfrac{1+2x-1}{2.2x} = 1.$

Còn $1 + (x-1)^2 \geq 1.$

Hai vế bằng nhau khi và chỉ khi $x = 1$

Đáp số $x = 1.$

Ví dụ 1.50. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-1} + x\sqrt{2x-1} = 2x^2.$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$.

Biến đổi phương trình đã cho thành $\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x} + \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} = 2$

Tương tự ví dụ trên ta có $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} \leq 1$ và $\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2} \leq 1$.

Vậy $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} + \dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2} \leq 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

Đáp số $x = 1$.

Ví dụ 1.51 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4 Trường Nguyễn Bỉnh Khiêm Quảng Nam)**.** Giải phương trình

$$x^4 + 2006x^3 + 1006009x^2 + x - \sqrt{2x + 2007} + 1004 = 0. \qquad (1.23)$$

Giải. Điều kiện $2x + 2007 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{2007}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(1.23) \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x.1003 + 1003^2) + \frac{1}{2}(2x + 2007 - \sqrt{2x+2007} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 1003)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2x+2007} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 1003) = 0 \\ \sqrt{2x+2007} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1003$$

Vậy $x = -1003$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1.52 (Đề dự bị Olympic 30-4 Chuyên Hùng Vương)**.** Giải phương trình

$$4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x + 30}}}}.$$

Giải. Điều kiện $x > 0$.

Đặt $\dfrac{1}{4}\sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + x}} = u, u \geq 0$ ta thu được hệ $\begin{cases} 4x = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + u}} \\ 4u = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + x}} \end{cases}$

Giả sử $x \geq u$ suy ra $4u = \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + x}} \geq \sqrt{30 + \dfrac{1}{4}\sqrt{30 + u}} = 4x$.

Vậy $x = u$ và ta thu được phương trình $4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + x}}$

Đặt $v = \frac{1}{4}\sqrt{30 + x}$ ta thu được hệ $\begin{cases} 4x = \sqrt{30 + v} \\ 4v = \sqrt{30 + x} \end{cases}$

Gải sử $x \geq v$ suy ra $4v = \sqrt{30 + x} \geq \sqrt{30 + v} = 4x$.

Giả sử $x \geq v$ suy ra $4v = \sqrt{30 + x} \geq \sqrt{30 + v} = 4x$.

Vậy $x = v$ ta thu được phương trình

$4x = \sqrt{30 + x}$ hay $\begin{cases} x > 0 \\ 16x^2 - x - 30 = 0 \end{cases}$ suy ra $x = \dfrac{1 + \sqrt{1921}}{32}$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \dfrac{1 + \sqrt{1921}}{32}$

Ví dụ 1.53. Giải phương trình

$$\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x + 3} = 2.$$

Giải.

Điều kiện $\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$

Suy ra $\sqrt{x + 3} \geq 2$. Vậy $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x + 3} \geq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Ví dụ 1.54. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - x} = 2.$$

Giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$.

Ta có $\sqrt{x} \geq x$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, x = 1$.

$\sqrt{1 - x} \geq 1 - x$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, x = 1$.

$\sqrt{1 + x} \geq 1$, dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.

Suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} \geq 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình.

1.4.4. Sử dụng tính chất véc tơ

Tính chất 1.1. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Dấu bằng xảy ra khi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng, điều này xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}$ với mọi số thực dương k.

Dạng phương trình
$\sqrt{f^2(x)+A^2}+\sqrt{g^2(x)+B^2}=\sqrt{h^2(x)+C^2}$.
Với $\begin{cases} f(x)+g(x)=h(x) \\ A+B=C \end{cases}$
Đặt $\begin{cases} \vec{a}=(f(x);A) \\ \vec{b}=(g(x);B) \end{cases}$
Suy ra $\vec{a}+\vec{b}=(f(x)+g(x);A+B)=(h(x);C)$ $(A,B,C$ có thể là các biểu thức chứa $x)$.

Phương trình đã cho trở thành $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng hay $\vec{a}=k\vec{b}$ với mọi số thực dương k.

Ví dụ 1.55 (Tuyển tập olympic 2003)**.** Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-8x+816}+\sqrt{x^2+10x+267}=\sqrt{2003}.$$

Giải. Đặt $\begin{cases} (4-x;20\sqrt{2})=\vec{a} \\ (5+x;11\sqrt{2})=\vec{b} \end{cases}$ suy ra $\vec{a}+\vec{b}=(9;31\sqrt{2})$.

Ta có $|\vec{a}|=\sqrt{x^2-8x+816}$; $|\vec{b}|=\sqrt{x^2+10x+267}$; $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2003}$.

Phương trình đã cho trở thành $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng điều này tương đương với

$\vec{a}=k\vec{b}$ với mọi số dương k. Khi đó $4-x=\dfrac{20}{11}(5+x)$. Giải ra ta được $x=-\dfrac{56}{31}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{56}{31}$.

Chương 2

Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ chứa tham số

2.1. Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

2.1.1. Phương trình dạng $\sqrt{f(x,m)} = \sqrt{g(x,m)}$

Cách giải. Ta thường biến đổi phương trình trên về hệ
$\begin{cases} g(x,m) \text{ có nghĩa và } g(x,m) \geq 0 \\ f(x,m) = g^2(x,m) \end{cases}$

Nhận xét 2.1. Không cần đặt điều kiện $f(x,m) \geq 0$

Ví dụ 2.1. Giải biện luận phương trình

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = m.$$

Giải. Ta có $\begin{cases} x + m \geq 0 \\ x^2 - 1 = (x+m)^2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \geq -m \\ 2mx = -m^2 - 1 \end{cases}$

Ta xét các trương hợp.

Với $m = 0$ hệ vô nghiệm do có một phương trinh thứ hai trong hệ vô nghiệm.

Với $m \neq 0$ hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $2mx = -m^2 - 1$ có nghiệm thỏa mãn $x \geq -m$ điều này xảy ra khi $-\dfrac{m^2+1}{2m} \geq -m$ hay $\dfrac{m^2-1}{2m} \geq 0$ suy ra $m \geq 1$ hoặc $-1 \leq m \leq 0$

Vậy $m \geq 1$ hoặc $-1 \leq m \leq 0$ là giá trị cần tìm.

2.1.2.Phương trình dạng $\sqrt{f(x,m)} + \sqrt{g(x,m)} = \sqrt{h(x,m)}$

Cách giải. Biến đổi phương trình trên tương đương với hệ
$$\begin{cases} f(x,m) \text{ có nghĩa và } f(x,m) \geq 0 \\ g(x,m) \text{ có nghĩa và } g(x,m) \geq 0 \\ f(x,m) + g(x,m) + 2\sqrt{f(x,m)g(x,m)} = h(x,m) \end{cases}$$

Ví dụ 2.2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{2m + x - x^2}.$$

Giải. Ta có
$$\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \geq 0 \\ x = m + 1 \end{cases} \quad \text{hay} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x = m + 1 \end{cases}$$
Do đó điều kiện để phương trình có nghiệm là $1 \leq m + 1 \leq 2$ hay $0 \leq m \leq 1$

2.2. Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

2.2.1. Một số dạng thường gặp

Cách đặt ẩn phụ trong trường hợp bài toán phương trình vô tỷ chứa tham số giống như cách đặt ẩn phụ trong trường hợp phương trình vô tỷ không chứa tham số đã được trình bày ở chương trước. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.3. Với giá trị nào của m phương trình sau có nghiệm?

$$2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - m = 0.$$

Giải. Điều kiện $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = t$ với $t \geq 0$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng

$2(x^2-2x-3)+\sqrt{x^2 - 2x - 3}-m+6 = 0$ hay $f(t) = 2t^2+t-m+6 = 0$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi $f(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm không âm. Điều này tương đương với.
$$\left[\begin{array}{l} a.f(0) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a.f(0) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{hay} \left[\begin{array}{l} 6 - m \leq 0 \\ \begin{cases} 8m - 47 \geq 0 \\ 6 - m \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2} \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 6$.

2.2.2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng

Ví dụ 2.4. Với giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = a.$$

Giải. Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{1-x} = u \\ \sqrt[3]{1+x} = v \end{cases}$ suy ra $u^3 + v^3 = 2$.

Khi đó phương trình đã cho được chuyển về hệ.

$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ u + v = a \end{cases}$ hay $\begin{cases} (u+v)(u^2+v^2-uv) = 2 \\ u + v = a \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a(u^2+v^2-uv) = 2 \\ u + v = a \end{cases}$

a. Nếu $a = 0$ thì hệ vô nghiệm.

b. Nếu $a \neq 0$ thì hệ được biến đổi như sau

$\begin{cases} u^2+v^2-uv = \dfrac{2}{a} \\ u + v = a \end{cases}$ hay $\begin{cases} (v+u)^2 - 3uv = \dfrac{2}{a} \\ u + v = a \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} u + v = a \\ uv = \dfrac{1}{3}(a^2 - \dfrac{2}{a}) \end{cases}$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$a^2 - 4\dfrac{1}{3}(a^2 - \dfrac{2}{a}) \geq 0$ hay $\dfrac{8-a^3}{3a} \geq 0$ suy ra $0 < a \leq 2$.

Vậy phương trình có nghiệm khi $0 < a \leq 2$.

2.3. Sử dụng định lí Lagrange

Định lí Lagrange Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và tồn tại đạo hàm trên $(a;b)$ luôn tồn tại một số $c \in (a;b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Từ đó ta có thể sử dụng định lí Lagrange để thực hiện yêu cầu đặt ra cho phương trình là.

Bài toán. Chứng minh phương trình có nghiệm

Từ định lí Lagrange nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ hay phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(a;b)$.

Vậy để áp dụng được kết quả trên vào việc chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(a;b)$ điều quan trọng nhất là nhận ra được nguyên hàm $F(x)$ của hàm $f(x)$. Cụ thể là ta thực hiện các bước sau.

Bước 1. Xác định hàm số $F(x)$ khả vi liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $F'(x) = f(x)$ và $F(a) = F(b)$.

Bước 2. Khi đó tồn tại một số $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = c$.

Ví dụ 2.5. Chứng tỏ rằng với $a + 3b = 27$, phương trình

$$2(6x-b)\sqrt{x+1} = a$$

luôn có ít nhất một nghiệm dương.

Giải. Biến đổi phương trình về dạng

$6x - b = \dfrac{a}{2\sqrt{x+1}}$ hay $\dfrac{a}{2\sqrt{x+1}} - 6x + b = 0$.

Xét hàm số $F(x) = a\sqrt{x+1} - 3x^2 + bx$ khả vi liên tục trên $(0;+\infty)$ có $F'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x+1}} - 6x + b$

và $F(3) - F(0) = (2a - 27 + 3b) - a = a + 3b - 27 = 0$.

Khi đó tồn tại $c \in (0;3)$ sao cho

$F'(x) = \dfrac{F(3)-F(0)}{3-0}$ hay $\dfrac{a}{2\sqrt{c+1}} - 6c + b = 0$ tức là phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm $c \in (0;3)$.

2.4. Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ

Phương pháp điều kiện cần và đủ thường tỏ ra khá hiểu quả cho các dạng toán tìm điều kiện của tham số để.

Dạng 1: Phương trình có nghiệm duy nhất.

Dạng 2: Phương trình có nghiệm với mọi giá trị của tham số.

Dạng 3: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D$. Khi đó ta cần thực hiện các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để các biểu thức trong phương trình có nghĩa.

Bước 2: Tìm điều kiện cần cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện đủ trong bước này cần có một số kỹ năng cơ bản.

Ví dụ 2.6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=m.$$

Giải. Điều kiện cần.

Nhận xét rằng phương trình có nghiệm x_0 thì cũng nhận $-x_0$ làm nghiệm.

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện đủ là $x_0=-x_0$ thay vào phương trình ta có $m=3$.

Điều kiện đủ.

Với $m=3$ khi đó phương trình có dạng $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=3$.

Vì $\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\le 1\\ \sqrt[3]{1-x^2}\le 1\end{cases}$ suy ra $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}\le 3$.

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=1\\ \sqrt[3]{1-x^2}=1\end{cases}$ hay $x=0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m=3$.

Ví dụ 2.7. Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$.

$$\sqrt{x^2+2x-m^2+2m+4}=x+m-2.$$

Giải.

Điều kiện cần.

Giả sử phương trình đã cho có nghiệm với mọi $x\ge 0$ thì $x=0$ cũng là một nghiệm của phương trình khi đó thay $x=0$ vào phương trình ta được

$\sqrt{-m^2+2m+4}=m-2$ hay $\begin{cases}m-2\ge 0\\ -m^2+2m+4=(m-2)^2\end{cases}$ suy ra $m=3$.

Điều kiện đủ.

Với $m=3$ khi đó phương trình đã cho có dạng

$\sqrt{x^2+2x+1}=x+1$ phương trình này luôn đúng với mọi $x\ge 0$.

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

2.5. Sử dụng phương pháp hàm số

Kiến thức cần nhớ

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D.

Phương trình $f(x) = g(m)$ với m là tham số có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\min_D f(x) \leq g(m) \leq \max_D f(x)$.

Bất phương trình $f(x) \leq g(m)$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\min_D f(x) \leq g(m)$.

Bất phương trình $f(x) \leq g(m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi $\max_D f(x) \leq g(m)$.

Bất phương trình $f(x) \geq g(m)$ có nghiệm $x \in D$ khi và chỉ khi $\max_D f(x) \geq g(m)$.

Bất phương trình $f(x) \geq g(m)$ có nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi $\min_D f(x) \geq g(m)$.

Nhận xét 2.2. Trong trường hợp không tồn tại $\min_D f(x)$, $\max_D f(x)$ thì ta sẽ lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên D. Sau đó căn cứ vào bảng biến thiên để kết luận cho bài toán.

Dạng toán thường gặp là bài toán tìm giá trị của tham số m sao cho phương trình chứa tham số m có nghiệm ta làm như sau.

1. Biến đổi phương về dạng $f(x) = g(m)$.

2. Tìm $\max_D f(x); \min_D f(x)$ (nếu có). Nếu $f(x)$ không đạt giá trị $\max_D f(x)$ hoặc $\min_D f(x)$ thì ta phải tính giới hạn và lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên D.

3. Từ bảng biến thiên suy ra giá trị m cần tìm.

Chú ý 2.1. Trong trường hợp phương trình chứa các biểu thức phức tạp ta có thể đặt ẩn phụ.

- Đặt $t = \phi(x)$ ($\phi(x)$ là hàm số thích hợp có mặt trong $f(x)$).
- Từ điều kiện ràng buộc của $x \in D$ ta tìm điều kiện $t \in K$.
- Ta đưa phương trình về dạng $f(t) = h(m)$.
- Lập bảng biến thiên $y = f(t)$ trên K.
- Từ bảng biến thiên suy ra kết luận của bài toán.

Ví dụ 2.8 (Tuyển sinh Đại học Cao đẳng khối A năm 2004)**.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm.

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

Giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = t$ với $x \in [-1; 1]$.

Ta có $t' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$.

$t' = 0$ suy ra $x = 0$ với $x \in [-1; 1]$ ta có bảng biến thiên.

x	-1		0		1
t'		$-$	0	$+$	
t	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

Như vậy $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Phương trình (2.11) tương đương với phương trình sau

$m(t+2) = 2 - t^2 + t, t \in [0; \sqrt{2}]$ hay $m = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$

Đặt $m = g(t) = -t+3-\dfrac{4}{t+2}, t \in [0; \sqrt{2}]$ khi đó $g'(t) = -1+\dfrac{4}{(t+2)^2}$

$g'(t) = 0$ suy ra $t = 0$ ta có bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{2}$
$g'(t)$	0	$-$	
$g(t)$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$

Như vậy phương trình có nghiệm khi $m \in [\sqrt{2}-1; 1]$.

Ví dụ 2.9. "Đại học cao đẳng khối A năm 2007". Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực.

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}.$$

Giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3(\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}})^2 + m = 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ với $x \geq 1$.

Ta có $0 \leq \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x-1} < 1$ suy ra $0 \leq t < 1$.

Xét phương trình theo ẩn t với $t \in [0;1)$ có dạng
$3t^2 + m = 2t$ hay $m = -3t^2 + 2t, t \in [0;1)$.
Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t, t \in [0;1)$
Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f(t)$	0 ↗	$\frac{1}{3}$	↘ -1

Như vậy phương trình đã cho có nghiệm với $m \in (-1; \dfrac{1}{3}]$

Chương 3

Một số cách xây dựng phương trình vô tỷ

Phương trình vô tỷ có nhiều dạng và nhiều cách giải khác nhau. Người giáo viên ngoài việc nắm được các dạng phương trình và các phương pháp giải chúng cần phải biết xây dựng lên các đề toán khác nhau làm tài liệu giảng dạy. Trong phần này tác giả xin trình bày một số cách xây dựng lên các phương trình vô tỷ, hy vọng sẽ đem lại những điều bổ ích.

3.1. Xây dựng phương trình vô tỷ từ các phương trình đã biết cách giải.

Con đường sáng tạo ra những "phương trình vô tỷ" là dựa trên cơ sở các phương pháp giải đã được trình bày. Ta tìm cách "che đậy" và biến đổi đi một chút ít để dấu đi bản chất, sao cho phương trình thu được dễ nhìn về mặt hình thức và mối quan hệ giữa các đối tượng tham gia trong phương trình càng khó nhận ra thì bài toán càng khó. Ta tìm hiểu một số cách xây dựng sau

3.1.1. Xây dựng phương trình vô tỷ từ phương trình bậc hai.

Từ phương trình dạng $at^2 + bt + c = 0$ ta thay thế $t = \sqrt{f(x)}$ ta sẽ nhận được một phương trình vô tỷ đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai để giải.

Ví dụ 3.1. Từ phương trình $2t^2 - 7t + 3 = 0$ ta chọn $t = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}}$

ta được phương trình vô tỷ sau.

$$2\frac{x^2+x+1}{x-1} - 7\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} + 3 \quad = 0$$

hoặc biến đổi để bài toán trở nên khó hơn bằng cách nhân cả hai vế của phương trình trên với $x-1$ ta được phương trình sau

$$3(x-1) + 2(x^2+x+1) \quad = 7\sqrt{x^3-1}$$

từ phương trình này ta xây dựng lên một bài toán giải phương trình vô tỷ như sau.

Bài toán 3.1. (Đề thi đề nghị Olympic 30/4/2007) Giải phương trình

$$2x^2 + 5x - 1 \quad = 7\sqrt{x^3-1}$$

Hướng dẫn 3.1. Phương trình này đã được giải bằng phương pháp đưa về dạng phương trình bậc hai như phương trình ban đầu xây dựng.

Một số dạng phương trình sau được giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về dạng phương trình bậc hai.

Dạng 1. $ax + b + \sqrt{cx+d} = 0$ đặt $\sqrt{cx+d} = t$ khi đó $x = \dfrac{t^2-d}{c}$ ta thu được một phương trình bậc hai $at^2 + ct + bc - ad = 0$.

Dạng 2. $A(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}) + B\sqrt{a^2-x^2} = C$.

Đặt $t = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ suy ra $t^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-x^2}$.

Ta thu được phương trình bậc hai $At + B\Big(\dfrac{t^2-2a}{2}\Big) = C$.

Dạng 3. $A(x + \sqrt{x+a}) + B(x^2 + x + 2x\sqrt{x+a}) + C = 0$.

Đặt $t = x + \sqrt{x+a}$ suy ra $t^2 = x^2 + x + a + 2x\sqrt{x+a}$.

Ta thu được phương trình bậc hai $At + B(t^2-a) + C = 0$.

Dạng 4. $A(x + \sqrt{x^2+a}) + B(x^2 + x\sqrt{x^2+a}) + C = 0$.

Đặt $t = x + \sqrt{x^2+a}$ khi đó $t^2 = 2x^2 + 2x\sqrt{x^2+a} + a$ hay $x^2 + x\sqrt{x^2+a} = \dfrac{t^2-a}{2}$.

Cuối cùng ta thu được phương trinh bậc hai $At + B\dfrac{t^2-a}{2} + C = 0$.

Bây giờ muốn tạo ra các phương trình vô tỷ mới ta có thể thay thế A, B, C, a, b, c bằng các số "hoặc các biểu thức" theo ý muốn là ta sẽ được các dạng phương trình vô tỷ được giải theo phương pháp đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai.

Ví dụ 3.2. (Cho dạng 2.)

Chọn $A = 1, B = 2, C = 4, a = 1$ ta được bài toán sau.

Bài toán 3.2. Giải phương trình phương trình

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x^2} = 4.$$

Hướng dẫn 3.2. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = t, t \geq 0$ suy ra $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$.

Ta thu được phương trình $t^2 + t - 6 = 0$ suy ra $t = 2$.

Thay thế trở lại ta có $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2$ suy ra $x = 0$.

3.1.2. Xây dựng phương trình vô tỷ từ phương trình tích.

Phương trình dạng $au + bv = ab + uv$. Ta có $au + bv = ab + uv$ hay $(u - b)(v - a) = 0$ suy ra $u = b, v = a$.

Chọn u, v là bằng các biểu thức chứa căn a, b bằng các số thực cho trước ta sẽ xây dựng được các phương trình vô tỷ.

Ví dụ 3.3. chọn $a = 1, b = 5, u = \sqrt{x-1}, v = \sqrt{x^2+1}$. Ta thu được phương trình

$$\sqrt{x-1} + 5\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} = 5$$

và ta có bài toán sau.

Bài toán 3.3. Giải phương trình

$$\sqrt{x-1} + 5\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} = 5$$

Hướng dẫn 3.3. Nghiệm của phương trình là nghiệm của phương trình là nghiệm của một trong hai phương trình

$\sqrt{x^2+1} = 1$ hoặc $\sqrt{x-1} = 5$.

Thực ra ta đang xây dựng phương trình vô tỷ dựa trên phương trình có dạng tích. Khó hơn một chút ta có thể xây dưng từ phương trình chứa nhiều tích $(u-a)(v-b)(w-c)=0$ gán cho u, v, w các biểu thức chứa căn. Gán cho a, b, c là các số thực thậm chí có thể là các biểu thức chứa căn. Biến đổi đi một chút là ta sẽ có được các phương trình vô tỷ "đẹp" hay "không" phụ thuộc vào việc ta có khéo chọn hay không.

3.1.3. Xây dựng phương trình vô tỷ từ một số dạng phương trình vô tỷ được giải theo phương pháp biến đổi tương tương.

Xây dựng phương trình vô tỷ từ phương trình dạng

$$\sqrt{A}+\sqrt{B} \quad =\sqrt{C}+\sqrt{D}$$

Gán các biểu thức chứa x cho A, B, C, D ta sẽ được các phương trình vô tỷ được giải bằng cách bình phương hai vế

Ví dụ 3.4. Gán $A=x+3, B=3x+1, C=4x, C=2x+2$ ta được bài toán giải phương trình vô tỷ sau.

Bài toán 3.4. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}$$

Hướng dẫn 3.4. Để giải phương trình này không khó nhưng hơi phức tạp một chút.

Phương trình này sẽ đơn giản hơn nếu ta chuyển vế phương trình
$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}$

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả
$\sqrt{6x^2+8x+2}=\sqrt{4x^2+12x}$ suy ra $x=1$ thử lại thấy $x=1$ là nghiệm phương trình.

Tượng tự ta cũng có một số dạng sau
Dạng 1: Phương trình $\sqrt{A}=\sqrt{B}$.
Dạng 2: Phương trình $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A=B^2 \end{cases}$

Dạng 3: $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A+B+2\sqrt{AB}=C \end{cases}$

Dạng 4: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ suy ra $A+B+3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})=C$
đối với dạng này thường sử dụng phép thế: $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ ta được phương trình $A+B+3\sqrt[3]{ABC}=C$

Từ các dạng toán này gán cho A, B, C các biểu thức chứa x ta sẽ được các phương trình vô tỷ tuy nhiên mức độ khó hay dễ phụ thuộc vào việc chọn các biểu thức cho A, B, C sao cho sau khi luỹ thừa hai vế lên ta thu được một phương trình có thể giải được.

3.2. Xây dựng phương trình vô tỷ từ hệ phương trình.

3.2.1. Xây dựng từ hệ đối xứng loại II

Ta đi xét một phương trình đối xứng loại II sau
$\begin{cases}(x+1)^2=y+2\\(y+1)^2=x+2\end{cases}$ việc giải hệ này thì đơn giản.

Bây giờ ta sẽ biến hệ trên thành phương trình bằng cách đặt $y=f(x)$ sao cho phương trình thứ hai trong hệ luôn đúng vậy $y=\sqrt{x+2}-1$, khi đó thay vào phương trình đầu của hệ ta có phương trình
$(x+1)^2=(\sqrt{x+2}-1)+1$ hay $x^2+2x=\sqrt{x+2}$

Từ đó có bài toán.

Bài toán 3.5. Giải phương trình

$$x^2+2x=\sqrt{x+2}$$

Hướng dẫn 3.5. Ta lại tiến hành đặt như trên và đưa về giải hệ đối xứng loai II.

Bằng cách tương tự xét hệ tổng quát dạng bậc hai $\begin{cases}(\alpha x+\beta)^2=ay+b\\(\alpha y+\beta)^2=ax+b\end{cases}$ ta sẽ xây dựng lên một phương trình dạng sau.

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có $\alpha y+\beta=\sqrt{ax+b}$ khi đó thay vào phương trình đầu tiên của hệ ta có phương trình

$$(\alpha x+\beta)^2 \quad =\frac{a}{\alpha}\sqrt{ax+b}+b-\frac{\beta a}{\alpha}(*)$$

Tương tự cho bậc cao hơn $(\alpha x+\beta)^n=\dfrac{a}{\alpha}\sqrt[n]{ax+b}+b-\dfrac{\beta a}{\alpha}(**)$

Để giải phương trình này ta lại đặt $\alpha y + \beta = \sqrt[n]{ax+b}$ để đưa về hệ như ban đầu đã xây dựng.

Vậy để có một phương trình vô tỷ giải bằng cách đưa về hệ đối xứng loại II, ta chỉ việc chọn α, β, a, b phù hợp với mức độ khó dễ của bài toán. Sau đó xây dựng phương trình ở dạng khai triển, học sinh muốn giải được phương trình dạng này thì phải biết viết phương trình về dạng phương trình (*) hoặc (**) để giải.

Ví dụ 3.5. Ta xây dựng bài toán như sau

Chọn $\alpha = 2, \beta = -3, a = 4, b = 5$

Ta có phương trình

$(2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$ hay $4x^2 - 12x - 2 = 2\sqrt{4x+5}$ suy ra $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$

Khi đó ta đã có một bài toán mới.

Bài toán 3.6. Giải phương trình vô tỷ

$$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$$

Hướng dẫn 3.6. Học sinh phải biết biến đổi dạng khai triển này về phương trình $(2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$

Sau đó đặt $2y - 3 = \sqrt{4x+5}$ để được hệ phương trình.

$\begin{cases}(2x-3)^2 = 4y+5\\(2y-3)^2 = 4x+5\end{cases}$ suy ra $(x-y)(x+y-1) = 0$

Với $x = y$ khi đó $2x - 3 = \sqrt{4x+5}$ suy ra $x = 2 + \sqrt{3}$

Với $x + y - 1 = 0$ khi đó $y = 1$ suy ra $x = 1 - \sqrt{2}$

3.3. Dùng hằng đẳng thức để xây dựng các phương trình vô tỷ

3.3.1. Từ những đánh giá bình phương $A^2 + B^2 \geq 0$.

Ta xây dựng những phương trình dạng

$A^2 + B^2 = 0$ suy ra $\begin{cases}A = 0\\B = 0\end{cases}$

Ví dụ từ phương trình $(\sqrt{5x-1} - 2x)^2 + (\sqrt{9-5x} - 2)^2 + \sqrt{x-1} = 0$ khai triển ra ta có phương trình

$4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4x\sqrt{5x-1} + 4\sqrt{9-5x})$

Khi đó ta có thể xây dựng bài toán.

Bài toán 3.7. Giải phương trình

$$4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4x\sqrt{5x-1} + 4\sqrt{9-5x})$$

Hướng dẫn 3.7. Khi đó muốn giải bài toán trên ta biến đổi đưa về phương trình trước khi khai triển và giải là tốt nhất. Sau đó áp dụng đánh giá như đã trình bày.

3.3.2. Từ hằng đẳng thức $(A-B)^2 = 0$ suy ra $A = B$

Ví dụ chọn $A = 1, B = \sqrt{\dfrac{4x}{x+3}}$ ta được phương trình

$(1 - \sqrt{\dfrac{4x}{x+3}})^2 = 0$ khai triển ra ta được phương trình

$1 + \dfrac{4x}{x+3} = 2\sqrt{\dfrac{4x}{x+3}}$

Nhân hai vế phương trình với $\sqrt{x+3}$ ta được phương trình

$\sqrt{x+3} + \dfrac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4x$ ta có bài toán.

Bài toán 3.8. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3} + \frac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4x$$

3.3.3. Xây dựng phương trình vô tỷ từ hằng đẳng thức sau.

Ta có

$$(A+B+C)^3 \quad = A^3 + B^3 + C^3 + 3(A+B)(B+C)(C+A)$$

Khi đó

$(A+B+C)^3 = A^3 + B^3 + C^3$ khi $(A+B)(B+C)(C+A) = 0$

Điều này xảy ra khi $A = -B$ hoặc $B = -C$ hoặc $A = -C$

Ta có thể xây dựng bài toán như sau.

Gán $A = \sqrt[3]{7x+2010}, B = -\sqrt[3]{x^2+2011}, C = \sqrt[3]{x^2-7x+2012}$

Như vậy $A^3 + B^3 + C^3 = 2011$. Từ đó ta có bài toán giải phương trình như sau.

Bài toán 3.9. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{7x + 2010} - \sqrt[3]{x^2 + 2011} + \sqrt[3]{x^2 - 7x + 2012} = \sqrt[3]{2011}$$

Hướng dẫn 3.8. Bài tóa thỏa mãn $(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3$. Nên nghiệm của phương trình là nghiệm của hệ tuyển $\left[\begin{array}{l} A = -B \\ B = -C \\ A = -C \end{array}\right.$ Trong đó A,B,C là các biểu thức như đã chọn.

Tương tự ta có thể xây dựng nhiều bài toán theo cách này!

3.4. Xây dựng phương trình vô tỷ dựa theo hàm đơn điệu.

3.4.1. Xây dựng phương trình vô tỷ dựa theo tính chất của hàm đơn điệu.

Dựa vào kết quả "nếu hàm $y = f(x)$ đơn điệu thì

$f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$" ta có thể xây dựng được những phương trình vô tỷ.

Ví dụ 3.6. Xuất phát từ hàm đơn điệu $y = f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ mọi $x \geq 0$ ta xây dựng phương trình.

$f(x) = f(\sqrt{3x - 1})$ hay $2x^3 + x^2 + 1 = 2(\sqrt{3x - 1})^3 + \sqrt{(3x - 1)^2} + 1$

Rút gọn ta được phương trình $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 2(3x - 1)\sqrt{3x - 1}$. Ta có bài toán sau

Bài toán 3.10. Giải phương trình

$$2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 2(3x - 1)\sqrt{3x - 1}$$

Hướng dẫn 3.9. Bài toán được giải theo phương pháp hàm số.

Ví dụ 3.7. Từ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, $f(t) = t^3 + t$ và từ phương trình $f(\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}) = f(x + 1)$

Ta xây dựng được bài toán sau.

Bài toán 3.11. Giải phương trình

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$$

Hướng dẫn 3.10. Bài toán được giải theo phương pháp sử dụng phương pháp hàm số. Giải phương trình ta có nghiệm phương trình là nghiệm của phương trình.

$(x + 1) = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ suy ra $x = 5$ hoặc $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3.4.2. Xây dựng phương trình vô tỷ dựa vào các ước lượng của hàm đơn điệu.

Để dễ sử dụng và kết hợp nhiều ước lượng ta xây dựng một số ước lượng như sau bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số ta nhận được

[1] $-1 \leq \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \leq 1$

Hàm số $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ là hàm đơn điệu tăng trên $[0; 1]$

Nên ta có $-1 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1$

[2] $-1 \leq \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x} \leq 1$

Hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x} \leq 1$ là hàm tăng trên $[0; 1]$

Nên ta có $-1 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1$

[3] $-1 \leq \sqrt[4]{x} - \sqrt{1-x} \leq 1$

Hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt{1-x}$ là hàm tăng trên $[0; 1]$

Nên ta có $-1 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1$

[4] $0 \leq \dfrac{\sqrt{x+3}}{2 + \sqrt{1-x}} \leq 1$

Hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{2 + \sqrt{1-x}}$ là hàm tăng trên $[-3; 1]$

Nên ta có $0 = f(-3) \leq f(x) \leq f(1) = 1$

[4] $0 \leq \dfrac{\sqrt[4]{x+15}}{2 + \sqrt[4]{1-x}} \leq 1$

Hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+15}}{2 + \sqrt[4]{1-x}}$ là hàm tăng trên $[-15; 1]$

Nên ta có $0 = f(-15) \leq f(x) \leq f(1) = 1$

[6] $\sqrt{3 + \sqrt{x}} - \sqrt{1 + \sqrt{1-x}} \leq 1$

Hàm số $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{x}} - \sqrt{1 + \sqrt{1-x}}$ là hàm tăng trên đoạn $[0; 1]$

Suy ra $f(x) \leq f(1) = 1$

[7] $\sqrt{x+3} - \sqrt{1+\sqrt{1-x}} \leq 1$

Hàm số $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{1+\sqrt{1-x}}$ là hàm tăng trên $[-3;1]$

suy ra $f(x) \leq f(1) = 1$

Sử dụng tính chất nghịch biến của hàm số mũ $y = a^x$ với cơ số $0 \leq a \leq 1$ ta nhận được

[8] $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq 1$

Ta có $\sqrt{x} \leq x$ hoặc $\sqrt{1-x} \leq 1-x$

suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq x + (1-x) = 1$

Dấu đẳng thức đạt được khi $x = 0$ hoặc $x = 1$

Cộng hai hay nhiều các ước lượng cơ bản chúng ta thu được các phương trình chứa căn sau.

Bài toán 3.12. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x} = 3 + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[6]{1-x}.$$

Hướng dẫn 3.11. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$

Phương trình đã cho tương đương với.

$(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}) + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x}) + (\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{1-x}) = 3$

Sử dụng các ước lượng cơ bản ta thu được vế trái nhỏ hơn hoặc bằng 3, và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

Đáp số $x = 1$

Bài toán 3.13. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x} + 3\sqrt[4]{1-x} = 3.$$

Hướng dẫn 3.12. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$

Phương trình đã cho tương đương với

$(\sqrt{x} + \sqrt[4]{1-x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x}) + (\sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{1-x})$

Vế trái lớn hơn hoặc bằng 3. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Đáp số $x = 1$.

Bài toán 3.14. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{3x+1}}{2+\sqrt[4]{1-x}}$$

Hướng dẫn 3.13. Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

Vế trái nhỏ hơn hoặc bằng 2. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

Đáp số $x = 1$.

Nhân các ước lượng cơ bản dương ta thu được các phương trình chứa căn sau.

Bài toán 3.15. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1}\sqrt[4]{4x-3}\sqrt[6]{6x-5} = x^3$$

Hướng dẫn 3.14. Điều kiện $x \leq \frac{5}{6}\cdot$

Chia hai vế cho $x^3 \neq 0$ ta thu được

$\frac{\sqrt{2x-1}}{x}\frac{\sqrt[4]{4x-3}}{x}\frac{\sqrt[6]{6x-5}}{x} = 1$

Vế trái nhỏ hơn hoặc bằng 1. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Đáp số $x = 1$.

3.5. Xây dựng phương trình vô tỷ dựa vào hàm số lượng giác và phương trình lượng giác.

Từ công thức lượng giác đơn giản $\cos 3t = \sin t$, ta có thể tạo ra được những phương trình vô tỷ.

Từ $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ ta có phương trình vô tỷ $4x^3 - 3x = x^2\sqrt{x^2-1}$ (1)

Nếu thay x trong phương trình (1) bởi $\frac{1}{x}$ ta sẽ có phương trình vô tỷ khó hơn $4 - 3x^2 = x^2\sqrt{x^2-1}$ (2).

Nếu thay x trong phương trình (1) bởi $x - 1$ ta sẽ có phương trình vô tỷ khó $4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x - x^2}$(3).

Tương tự như vậy từ các công thức $\sin 3x, \sin 4x \ldots$ ta cũng có thể xây dựng phương trình vô tỷ theo kiểu lượng giác!

Ví dụ 3.8. Từ phương trình lượng giác $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2}$ và từ đẳng thức lượng giác $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ suy ra $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$ thay thế $\cos t$ bởi x, ta sẽ có một phương trình vô tỷ như sau $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$.

Vậy ta có bài toán giải phương trình vô tỷ được giải theo phương pháp đặt ẩn phụ lượng giác như sau.

Bài toán 3.16. Giải phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 2\sqrt{2}$$

Hướng dẫn 3.15. Khi đó phương trình này được giải theo phương pháp đặt ẩn phụ lượng giác.

Ví dụ 3.9. Từ phương trình $\cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\cos t \sin t$ thay thế $\cos t$ bởi x ta được phương trình vô tỷ $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

Và ta có bài toán giải phương trình vô tỷ

Bài toán 3.17. Giải phương trình

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$$

Hướng dẫn 3.16. Phương trình này được giải theo phương pháp đặt ẩn phụ lượng giác.

Ví dụ 3.10. Từ phương trình $5 + 3\sin t = 8(\cos^6 t + \sin^6 t)$ thay thế $\cos t$ bởi x, ta đươc phương trình vô tỷ. $5 + 3\sqrt{1-x^2} = 8[x^6 + (1-x^2)^3]$. Và ta có bài toán.

Bài toán 3.18. Giải phương trình $5 + 3\sqrt{1-x^2} = 8[x^6 + (1-x^2)^3]$

Hướng dẫn 3.17. Từ điều kiện $|x| \le 1$ ta đặt $x = \cos t$; $t \in [0;\pi]$ và ta thu được.

$$\begin{aligned}
5 + 3\sin t = 8(\sin^6 t + \cos^6 t) &\Leftrightarrow 3\sin t = 8(1 - 3\sin^2 t\cos^2 t)\\
&\Leftrightarrow 3\sin t = 3 - 24\sin^2 t\cos^2 t\\
&\Leftrightarrow \sin t = 1 - 8\sin^2 t\cos^2 t = 1 - 2\sin^2 2t = \cos 4t\\
&\Leftrightarrow \cos 4t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right).
\end{aligned}$$

Từ phương trình này ta sẽ tìm được t, sau đó suy ra được x.

3.6. Xây dựng phương trình vô tỷ từ phép "đặt ẩn phụ không toàn phần".

Ta xét bài toán xây dựng lớp phương trình dạng $At^2 + Bt + C = 0$, trong đó t là biểu thức chứa căn của x, còn A, B, C là các biểu thức hữu tỷ chứa x, sao cho $\Delta = B^2 - 4AC$ luôn luôn là một biểu thức chính phương.

Thường để cho tiện ta chọn $-\dfrac{B}{A} = f(x) + g(x)$ còn $\dfrac{C}{A} = f(x)g(x)$ khi đó $t = g(x)$ hoặc $t = f(x)$.

Ví dụ 3.11. Ta chọn $t = \sqrt{x^2+2},\ f(x) = 3, g(x) = x - 1$.

Ta có bài toán giải phương trình vô tỷ như sau.

Bài toán 3.19. Giải phương trình

$$x^2 + (3 - \sqrt{x^2+2})x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}$$

Hướng dẫn 3.18. Để giải bài này học sinh phải biết biến đổi về dạng

$(x^2+2) - (2+x)\sqrt{x^2+2} - 3 + 3x = 0$ sau đó đặt $t = x^2+2$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình ẩn t là $t^2 - (2+x)t - 3 + 3x = 0$ rồi giải phương trình này.

Có thể nhẩm nghiệm hoặc tính Δ, được nghiệm $t = 3, t = x - 1$.

Với $t = 3$ thì $\sqrt{x^2+2} = 3$ suy ra $x = \pm\sqrt{7}$.

Với $t = x - 1 (x \geq 1)$ vô nghiệm.

Như vậy với cách xây dựng như trên ta có thể có nhiều bài toán. Giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp ẩn phụ không toàn phần.

3.7. Xây dựng phương trình vô tỷ dựa vào tính chất vectơ.

Tính chất $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Ta xây dựng như sau.

Đặt $\begin{cases} \vec{a} = (f(x); A) \\ \vec{b} = (g(x); B) \end{cases}$ suy ra $\vec{a} + \vec{b} = (f(x) + g(x); A + B)$.

Khi đó ta có phương trình

$$\sqrt{f^2(x) + A^2} + \sqrt{g^2(x) + B^2} = \sqrt{(f(x) + g(x))^2 + (A+B)^2}$$

Ví dụ 3.12. chọn $\begin{cases} \vec{a} = (4 - x; 20\sqrt{2}) \\ \vec{b} = (5 + x; 10\sqrt{2}) \end{cases}$ suy ra $\vec{a} + \vec{b} = (9; 31\sqrt{2})$.

Vậy $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 - 8x + 816}, |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 10x + 267}$
và $|\vec{a} + \vec{b}| = 2003$.

Ta xây dựng được phương trình như sau
$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 816} + \sqrt{x^2 + 10x + 267} = 2003$

Bài toán 3.20 (Thi olympic 30-4 năm 2003)**.** Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 8x + 816} + \sqrt{x^2 + 10x + 267} = 2003.$$

3.8. Xây dựng phương trình vô tỷ dựa vào bất đẳng thức

3.8.1. Bất đẳng thức "tam thức bậc α (xem [2], trang 25).

Với mọi $\alpha > 1$ ta có $x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x$ với mọi $x \geq 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Chọn α =2010 ta có phương trình $\sqrt{x^{2010} + 2009} = \sqrt{2010x}$ và ta có bài toán.

Bài toán 3.21. Giải phương trình

$$\sqrt{x^{2010} + 2009} = \sqrt{2010x}.$$

Hướng dẫn 3.19. Sử dụng bất đẳng thức "tam thức bậc α" ta sẽ có $x = 1$ là nghiệm.

Ví dụ 3.13. Có thể tạo ra các bài toán khó hơn bằng cách thay x ở phương trình trên bằng các biểu thức chứa x.

Ví dụ thay x bằng $(x^2 - 1)^2$ và $\alpha = 3$ ta sẽ có phương trình
$\sqrt{(x^2 - 1)^3 + 2} = \sqrt{3(x^2 + 1)}$ hay $\sqrt{x^6 - 3x^4 + 3x^2 + 1} = \sqrt{3(x^2 - 1)}$.
Ta có bài toán sau.

Bài toán 3.22. Giải phương trình $\sqrt{x^6 - 3x^4 + 3x^2 + 1} = \sqrt{3(x^2 - 1)}$.

Hướng dẫn 3.20. Gặp bài toán này học sinh cần biết biến đổi đưa về phương trình ban đầu xây dựng để áp dụng bất đẳng thức thì bài toán

trở nên dễ dàng. Áp dụng bất đẳng thức trên tìm ra được nghiệm phương trình là khi dấu đẳng thức xảy ra $x^2 - 1 = 1$ suy ra $x = \pm\sqrt{2}$.

Như vậy có thể thay x bằng các biểu thức khác của x ta sẽ được các phương trình khó hay dễ tuỳ thuộc vào ta chọn biểu thức thay thế cho x.

3.8.2. Xây dựng phương trình vô tỷ dựa vào bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta nhận được

[1] $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} \leq 1$

Vì $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} \leq \dfrac{2x-1+1}{2x} = 1$

[2] $\dfrac{\sqrt[4]{4x-3}}{x} \leq 1$

Vì $\dfrac{\sqrt[4]{4x-3}}{x} \leq \dfrac{4x-3+1+1+1}{4x} = 1$ dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

[3] $\dfrac{\sqrt[6]{6x-5}}{x} \leq \dfrac{6x-5+1+1+1+1+1}{6x} = 1$ dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

[4] $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leq 2$

Vì $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \leq 2\sqrt{\dfrac{x+2-x}{2}} = 2$ dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

[5] $\sqrt[4]{x + \sqrt[4]{2-x}} \leq 2$

Vì $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} \leq 2\sqrt[4]{\dfrac{x+2-x}{2}} = 2$ dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

[6] $x + \sqrt{2-x^2} \leq 2$ vì

$x + \sqrt{2-x^2} \leq |x| + \sqrt{2-x^2} = \sqrt{x^2} + \sqrt{2-x^2} \leq 2\sqrt{\dfrac{x^2+2-x^2}{2}} = 2$

dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

[7] $x + \sqrt[4]{2-x^4} \leq 2$ vì

$x + \sqrt[4]{2-x^4} \leq |x| + \sqrt[4]{2-x^4} = \sqrt{x^2} + \sqrt[4]{2-x^4}$

$= \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{2-x^4} \leq 2\sqrt[4]{\dfrac{x^4+2-x^4}{2}} = 1$

dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$

[8] $x + \sqrt[6]{2-x^6} \leq 2$ vì

$$x+\sqrt[6]{2-x^6}\le |x|+\sqrt[6]{2-x^6}\le \sqrt[6]{x^6}+\sqrt[6]{2-x^6}\le 2\sqrt[6]{\frac{x^6+2-x^6}{2}}=1$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1$.

Ta gọi đây là các ước lượng cơ bản. Có thể tạo ra được rất nhiều các ước lượng cơ bản theo cách này.

Ta xây dựng các phương trình vô tỷ như sau

Cách 1. Cộng hai hay nhiều các ước lượng cơ bản

Bài toán 3.23. Giải phương trình

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{4x-3}+\sqrt[6]{6x-5}=3x$$

Hướng dẫn 3.21. Điều kiện $x\ge \frac{5}{6}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+\frac{\sqrt[4]{4x-3}}{x}+\frac{\sqrt[6]{6x-5}}{x}=3$

Vế trái nhỏ thua hoặc bằng 3. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Bài toán 3.24. Cộng các ước lương cơ bản như sau.

$$(\sqrt{x}+\sqrt[4]{1-x})+(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{1-x})+(\sqrt[6]{x}+\sqrt[4]{1-x})=3$$

Viết lại $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+3\sqrt[4]{1-x}=3$.

Khi đó ta có bài toán sau.

Bài toán 3.25. $\{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+3\sqrt[4]{1-x}=3$

Hướng dẫn 3.22. Vế trái phương trình lớn hơn hoặc bằng 3. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Vậy $x=1$ là nghiệm phương trình.

Cách 2. Nhân các ước lượng cơ bản ta được các phương trình chứa căn.

Ví dụ nhân các ước lượng cơ bản ta có bài toán giải phương trình.

$$\sqrt{2x-1}.\sqrt[4]{4x-3}.\sqrt[6]{6x-5}\quad =x^3$$

Hướng dẫn 3.23. Với điều kiện $x \geq \frac{5}{6}\cdot$ Sau đó chia cả hai vế cho x ta thu được.

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x}.\frac{\sqrt[4]{4x-3}}{x}.\frac{\sqrt[6]{6x-5}}{x} = 1$$

Vế trái nhỏ thua hoặc bằng 1. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Nhân các ước lương cơ bản ta có bài toán.

Bài toán 3.26. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})} = 1$$

Hướng dẫn 3.24. Vì $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \leq 1$; $\frac{\sqrt{2x-1}}{x} \leq 1$ suy ra vế trái nhỏ hơn hoặc băng 1. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Đáp số $x = 1$ là nghiệm phương trình.

3.8.3. Xây dựng phương trình dựa theo bất đẳng thức Cauchy.

Từ bất đẳng thức $(AB + CD)^2 \leq (A^2 + C^2)(B^2 + D^2)$ dấu đẳng thức xảy ra khi "$AD = BC$"

Ví dụ 3.14. Ta chọn các cặp số $A = 2\sqrt{2}, B = \sqrt{x+1}, C = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$,

$D = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

Ta xây dựng phương trình

$(2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}})^2 \leq (8+x+1)\Big(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}\Big)$

suy ra $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{9+x}$

Từ đây ta đi xây dựng bài toán giải phương trình vô tỷ sau.

Bài toán 3.27. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{9+x}$$

Hướng dẫn 3.25. Như vậy học sinh có thể biến đổi phương trình để áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai cặp số A, C và B, D như trên để rút ra dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

suy ra $x = \dfrac{1}{7}\cdot$

Vậy $x = \dfrac{1}{7}$ là nghiệm phương trình.

Ví dụ 3.15. Từ các cặp số $A = 3\sqrt{2}, B = \sqrt{2x+1}, C = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

$D = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

Tương tự như trên ta có thể xây dựng bài toán giải phương trình vô tỷ sau.

Bài toán 3.28. Giải phương trình

$$\frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x+1} \quad = \sqrt{19+2x}$$

Hướng dẫn 3.26. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy các căp số A,C và B,D như trên ta có dấu đẳng thức xảy ra hay nghiệm phương trình là nghiệm của phương trình $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ điều kiện $x \geq 0$. Bình phương hai vế giải phương trình ta được $x = \dfrac{17+\sqrt{433}}{4}$ là nghiệm.

3.9. Xây dựng phương trình vô tỷ bằng phương pháp hình học

Cho tam giác ABC có đường AD là đường phân giác trong của góc A, $\hat{A} = 2\alpha$, $m \in AD$, đặt $AM = x$ khi đó nếu $M \in BC$ thì $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}\cdot$

Ví dụ 3.16. Xét tam giác vuông ABC vuông tại A có $AB = 4, AC = 3$. Gọi AD là phân giác trong của $\hat{A}$. Trên AD lấy điểm M, Đặt $AM = x$. Trong tam giác AMC có $CM^2 = x^2 - 3\sqrt{2}x + 9$.

Trong tam giác AMB có $BM^2 = x^2 - 4\sqrt{2}x$. Ta xây dựng bài toán như sau.

Bài toán 3.29 (Dự bị Olympic 30-4 THPT Chuyên Tiền Giang năm 2007)**.** Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-3x\sqrt{2}+9}+\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+16}=5.$$

Hướng dẫn 3.27. Khi đó với $x<0$ thì $\begin{cases}\sqrt{x^2-3x\sqrt{2}+9}>3\\ \sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+16}>4\end{cases}$ phương trình vô nghiệm.

Với $x>0$ ta có
$CM+BM=\sqrt{x^2-3x\sqrt{2}+9}+\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+16}\geq BC=5.$
Dấu bằng xảy ra khi M trùng với D hay M chia BC theo tỉ số
$k=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow x=AD=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}\cdot$

Ví dụ 3.17. Cho tam giác ABC có $AB=3,AC=4,\hat{A}=120^o$, AD là đường phân giác trong góc A. Lấy $M\in AD$, đặt $AM=x$

Khi đó ta có $BM=\sqrt{x^2-3x+9},CM=\sqrt{x^2-4x+16}$,
$BC=\sqrt{9+16-2.3.4.\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)}=37.$

Ta xây dựng phương trình $\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-4x+16}=\sqrt{37}$. Ta có bài toán.

Bài toán 3.30. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-4x+16}=\sqrt{37}$$

Hướng dẫn 3.28. Lập luận tương tự như hai bài toán trên ta có $x<0$ phương trình vô nghiệm.

Với $x>0$ ta có
$BM+CM=\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{x^2-4x+16}\geq BC=\sqrt{37}.$
Dấu bằng xảy ra khi M trùng với D hay M chia BC theo tỉ số
$\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x^2-3x+9}}{\sqrt{x^2-4x+16}}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{12}{7}\cdot$

Ví dụ 3.18. Cho tam giác ABC có $AB=5,AC=4,\hat{A}=60^o$, AD là đường phân giác trong góc A. Lấy $M\in AD$, đặt $AM=x$

Khi đó ta có $BM=\sqrt{x^2-5\sqrt{3}x+25},CM=\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+16}$,

$BC = \sqrt{25 + 16 - 2.4.5.\frac{1}{2}} = \sqrt{21}.$

Ta xây dựng phương trình

$\sqrt{x^2 - 5\sqrt{3}x + 25} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16} = \sqrt{21}$. Ta có bài toán.

Bài toán 3.31. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 5\sqrt{3}x + 25} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16} = \sqrt{21}$$

Hướng dẫn 3.29. Với $x < 0$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 5\sqrt{3}x + 25} > 5 \\ \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16} > 4 \end{cases}$ phương trình vô nghiệm.

Xét $x > 0$ khi đó dấu bằng của phương trình xảy ra khi $\frac{MB}{MC} = \frac{5}{4}$ hay $4\sqrt{x^2 - 5\sqrt{3}x + 25} = 5\sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Bình phương hai vế giải ra ta được nghiệm phương trình là $x = \frac{20\sqrt{3}}{9}$.

Kết luận

Luận văn *Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ* đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Hệ thống các phương pháp giải các phương trình vô tỷ.
- Trình bày các phương pháp giải và biện luận phương trình vô tỷ có chứa tham số.
- Đưa ra các phương pháp xây dựng phương trình vô tỷ mới.

Kết quả của luận văn đã góp phần nâng cao chất lượng dạy và học Toán ở trường phổ thông trong giai đoạn hiện nay.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, 1993, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, 2004, *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục.

[3] *Các chuyên đề phương pháp giải phương trình bất phương trình trên mạng Internet.*

[4] Nguyễn Văn Mậu, 2002, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ,* NXB Giáo Dục.

[5] *Tạp chí toán học tuổi trẻ.*

[6] *Các tuyển tập đề thi Olympic 30-4*, NXB Đại Học Sư Phạm.

[7] Nguyễn Vũ Lương, 2008, *Hệ phương trình phương trình chứa căn*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.